Die Strömungsverhältnisse in einem Krümmer mit kleinem Krümmungsradius

Inaugural-Dissertation

der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Fribourg
in der Schweiz zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt von

P. Ansgar Müller

von

Lengnau/AG

Sonderabdruck aus dem Archiv für Kreislaufforschung Bd. 19, Heft 8—12 (1953)
Verlag von Dr. Dietrich Steinkopff, Darmstadt

Angenommen von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Fribourg in der Schweiz auf Vorschlag der Herren Professoren Dr. A. Müller und Dr. F. Dessauer.

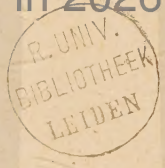
Fribourg, den 1. September 1953.

Der Dekan

Prof. Dr. A. Faller

Meinem hochwürdigsten Abte,
meinem lieben Vater
und
meiner unvergeßlichen Mutter sel.
in Dankbarkeit
gewidmet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026



https://archive.org/details/IA41538116_0048

Aus dem Physiologischen Universitäts-Institut Freiburg (Schweiz)

Die Strömungsverhältnisse in einem Krümmer mit kleinem Krümmungsradius

Von P. Ansgar Müller

Mit 30 Abbildungen

(Eingegangen am 21. Februar 1953)

Inhaltsverzeichnis

I. Geschichtlicher Überblick 282
II. Aufgabe der vorliegenden Arbeit 289
III. Untersuchungsmethode 290
1. Versuchsanordnung 290
2. Strömungsbeobachtung 291
3. Druckmessungen 292
a) An- und Ablaufrohr 292
b) Krümmer 292
c) Bestimmung der Dichte ϱ und Zähigkeit μ 293
4. Geschwindigkeitsmessungen 294
a) Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ 294
b) Bestimmung der örtlichen Geschwindigkeit u 294

IV. Ergebnisse 296
1. Beobachtung 297
2. Druckmessungen 298
a) Versuchsserie Re = ~ 10 298
b) Versuchsserie Re = ~ 63 299
c) Versuchsserie Re = ~ 135 301
3. Geschwindigkeitsmessungen 303
a) Versuchsserie Re = ~ 63 304
b) Versuchsserie Re = ~ 135 307
4. Widerstandsbeiwert h_{kr} 309
V. Zusammenfassung 310
Literaturverzeichnis 311

I. Geschichtlicher Überblick

Der Krümmer, als Kanalelement für die Energieleitung und -verteilung, hat schon, wenn auch nicht expressis verbis, die Baumeister der antiken Wasserleitungen beschäftigt. Die Anlagen der noch erhalten gebliebenen Aquädukte lassen vermuten, den damaligen Architekten sei schon bekannt gewesen, daß eine Kurve oder Krümmung eine zusätzliche Verlustquelle für ein Leitungssystem bedeute.

Am besten lassen sich die ursprünglichen Wasserleitungen in die Stadt Rom verfolgen, wo heute noch Wasser auf den klassischen alten Aquädukten der Römer in die Stadt hineingeführt wird (1), (2). Brüske Umlenkungen haben die damaligen Konstrukteure bereits vermieden. Ihre Wasserleitungen waren, wenn möglich, immer gerade geführt, auch auf die Gefahr hin, daß kostspielige Kunstbauten aufgeführt werden mußten.

Ausführlich berichten Plinius (3) und Frontinus (4) über die Wasserversorgung der alten Stadt Rom.

Mit der Renaissance erst begann sich neben dem praktischen Interesse auch das theoretische Forschen auf hydrodynamischem Gebiete zu regen. Im 16. Jahrhundert stellt sich Leonardo da Vinci als Hydrauliker vor mit seiner Monographie: De retrosi dell' aqua (5). Im 28. Kapitel dieses Buches befindet sich die Zeichnung einer T-förmigen Kanalabzweigung. Die Wirkung der Abzweigung ist anschaulich dargelegt durch das bei A vorhandene Wirbelfeld (Abb. 1).

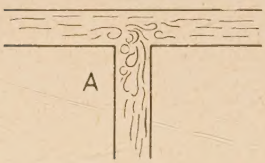


Abb. 1. Zeichnung nach Leonardo da Vinci. Bei A Wirbelfeld.

Nach den hydraulischen Gesetzmäßigkeiten hat auch Galileo Galilei geforscht (6). Nach ihm wird der Lauf des Wassers verzögert durch Krümmungen und Biegungen eines Kanales. Diese Verzögerung richtet sich, so schreibt Galilei, je nach dem von der Krümmung gebildeten Winkel. Sie sei stark und groß für Krümmungswinkel $\alpha = 90°—180°$, mäßig und unmerkbar fast, wenn α kleiner als 90° werde, wobei er unter Krümmungswinkel den Winkel versteht, den die beiden in Richtung auf den Krümmungsmittelpunkt gezogenen Krümmungsradien zwischen Krümmeranfang und -ende bilden.

Der Schüler und Freund Galileis, Castelli Benedetto (Antonio), ein Benediktiner der Kongregation von Monte Cassino, wurde von Papst Urban VIII. für hydraulische Arbeiten konsultiert. Dieser Auftrag führte ihn zu einem ausgedehnten Studium über das „fließende Wasser" (7). Auch er hatte sich mit den Krümmungen befaßt, ohne aber neue Resultate zu liefern.

Mit Dubuat (8) fing die systematische Erforschung des Krümmerproblemes an. Dubuats Gedankengang und Terminologie bei der Behandlung des Krümmers in den „Principes d'Hydrauliques" führen uns zur Annahme, der Autor habe sich das hydraulische Geschehen im Krümmer analog dem elastischen Stoß der festen Körper vorgestellt.

Er beschreibt das Verhalten des Flüssigkeitsteilchens im Krümmergebiet mit dem für den elastischen Stoß synonymen Terminus „choquer" (Tome II, 355). Dementsprechend unterscheidet er auch Krümmungen mit einem einzigen oder Krümmungen mit mehreren Anprall- oder Brikolenwinkeln. In Abb. 9 der „Principes d'Hydrauliques" ist die erste, in Abb. 12 des genannten Werkes die zweite Krümmerart dargestellt (vgl. Abb. 2 und 3 unserer Arbeit).

Der Brikolenwinkel wird nach DUBUAT nicht von den beiden Krümmerschenkeln gebildet, sondern eigens konstruiert. DUBUAT zieht in der Rohrachse eine Gerade. Sobald diese gerade Linie die Röhrenwand an der Krümmung trifft, läßt man sie unter dem gleichen Winkel, unter dem sie einfiel, wieder austreten. Das wird so oft wiederholt, bis die reflektierte Gerade wieder in die Achse des anschließenden Schenkels gelangt.

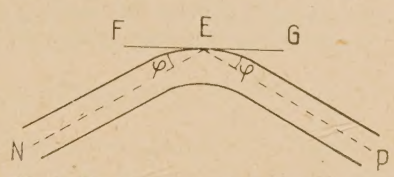


Abb. 2. Darstellung des Anprallwinkels nach DUBUAT (angle de bricole). Nous appelerons angle de bricole l'angle: NEF, ou son égal: GEP et le coude d'une rivière, où le courant n'est réfléchi qu'une fois, sera nommé coude d'une seule bricole.

DUBUATS ausgedehnte Versuche ergaben (l. c. Tome I, no. 104), daß erstens die Vergrößerung der Druckhöhe, welche nötig ist, um den Krümmerwiderstand zu überwinden, proportional dem Geschwindigkeitsquadrat u^2 und zweitens der Krümmerwiderstand oder die ihm entsprechende Druckhöhe ebenfalls proportional dem Sinusquadrat s^2 aller Anprallungswinkel war. Letzteres unter der Voraussetzung, daß der Winkel nicht einen Grenzwert zwischen 36 und 40 Grad überschritt. Drittens wuchs der Widerstand mit der Anzahl der Krümmer, die in einem Leitungssystem eingebaut waren.

Nach DUBUAT wurde somit der Widerstand h durch die Formel

$$h = \frac{u^2 \cdot s^2 \cdot n}{m} \qquad [1]$$

ausgedrückt, worin

u = mittlere Geschwindigkeit,
s = Sinus des Brikolenwinkels,
n = Anzahl der Brikolenwinkel,
m = eine experimentell zu bestimmende Konstante bedeuten.

DUBUAT gibt als Konstante m die Zahl 3000 an, die er aus den Mittelwerten verschiedener Messungen fand (l. c. Tome I, no. 105).

Die Formel hieße somit unter Berücksichtigung der Umrechnung von Pariser Zoll in das CGS-System:

$$h = \frac{1}{7.29} \cdot \frac{u^2 \cdot s^2 \cdot n}{3000} \qquad [2]$$

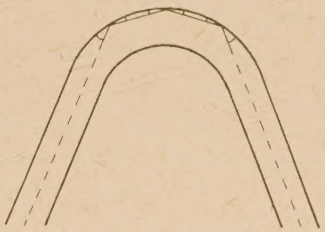


Abb. 3. Konstruktion des Anprallwinkels nach DUBUAT bei einem Krümmer mit mehreren Anprallungen. Quand il y aura plusieurs réflexions, nous dirons que c'est un coude de plusieurs bricoles. Tome I, no. 87.

Die Formel soll nur dann gelten, wenn der Flüssigkeitsfaden bei seinem Stoß an die Krümmung unter gleichem Winkel reflektiert wird (Tome II, no. 355).

DUBUATS Versuchskrümmer waren aus Blei, die geraden Rohrteile aber aus Weißblech. Der Ablenkungswinkel der Krümmung lag zwischen den beiden Grenzen $\alpha = 49° 8'$ und $\alpha = 144°$ (l. c. Tome II, n° 356).

HAGEN (9) hat gegenüber der Theorie DUBUATS später ernste Bedenken erhoben. „Nach meinem Dafürhalten ist diese Bestimmung des Einflusses der Krümmungen, sowie die Anwendung, die man davon machen kann, sehr unsicher". (S. 222).

EYTELWEIN (10) geht in der Beschreibung der Krümmungen (curvaturae, coudes) nicht über die Forschungsarbeiten DUBUATS hinaus.

Den Verlust eines Krümmers kann man nach NAVIER (11) nicht anders als experimentell bestimmen. NAVIER gibt zur Berechnung des Druckhöhenverlustes den Ausdruck:

$$h = (0.0039 + 0.0186\ R) \cdot \frac{b}{R^2} \cdot \frac{u^2}{2g} \qquad [3]$$

wobei R den Krümmungsradius und b den dazugehörigen Krümmungsbogen bezeichnen. Nach NAVIERS eigenen Aussagen ist die Formel [3] unter Verwertung des DUBUATschen Versuchsmateriales rein empirisch gefunden worden.

Die Arbeiten und Formelansätze von DUBUAT und NAVIER werden von WEISBACH (12) als „gänzlich unbrauchbar" hingestellt. (I. Teil, S. 440.)

Als besondere Hindernisse für die Bewegung des Wassers bezeichnet WEISBACH gekrümmte Röhren und Knie- oder Kropfröhren. Gekrümmte Röhren sind stetig, Knie- oder gekröpfte Röhren aber unstetig gebogen (Abb. 4).

An beiden Modellen, gekrümmten wie gekröpften, hat WEISBACH ausgedehnte Versuche angestellt und für jedes einzelne Modell die Formel für den Druckverlust h auf empirischem Wege gefunden.

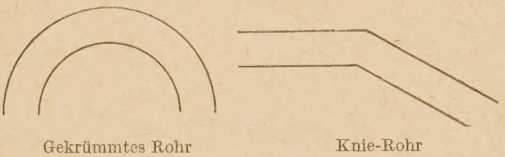


Abb. 4

WEISBACH sieht im Verhältnis Rohrradius r zum Krümmungshalbmesser R einen wichtigen Faktor in der Beurteilung des Druckverlustes, den solche Krümmer auslösen können.

Für den Druckverlust in gekrümmten Röhren gibt WEISBACH an:

$$h = \eta \left(\frac{u^2}{2g}\right) \left[0.131 + 1.847 \left(\frac{r}{R}\right)^{7/2}\right] \qquad [4]$$

η ist eine experimentell gefundene Größe, die vom Verhältnis r/R abhängig ist (vgl. auch MÜLLER-STÄHELIN, Experimentelles zur Hydromechanik und Hämodynamik, S. 187 (Basel 1923).

Für den Druckverlust in gekröpften Röhren gibt WEISBACH folgenden Ausdruck:

$$h = \zeta \cdot \frac{u^2}{2g} \qquad [5]$$

Für den Widerstandskoeffizienten ζ dieser Krümmerart fand er auf Grund seiner zahlreichen Versuche an den verschiedensten Kniestücken folgende Beziehung:

$$\zeta = 0.9457 \sin \varphi^2 + 2.047 \sin \varphi^4 \qquad [6]$$

φ = Anprallungs- oder Brikolenwinkel.

WEISBACH (l. c.) hebt in seinem theoretischen Teil noch hervor, daß eine Vergrößerung des Ablenkungswinkels über 90° den Druckverlust nicht erhöhe.

FREEMANN (13) verglich den Zuwachs des Druckverlustes bei verschiedenen Rohrweiten und Krümmungshalbmessern. Er zeigte in seinen Ergebnissen, daß der Druckverlust mit der Zunahme des Krümmungshalbmessers R anstieg.

Während WEISBACH noch den Druckverlust im Krümmer allein ins Auge faßte, ging MONTANARI (14) einen bedeutenden Schritt weiter und berücksichtigte den Druckverlust auch im anschließenden Ablaufrohr. Für diesen zusätzlichen Krümmerverlust, der noch im geraden anschließenden Ablaufrohr als wirksame Störung auftritt, gibt MONTANARI zwei Beziehungen an. Sie gelten beide für Rohre von relativ kleinem Querschnitt ($2\,r <= 2$ cm). Die erste bezeichnet den durch die Ablenkung hinzutretenden Druckhöhenverlust auf eine Länge von 5 Durchmessern vom Knie abwärts

$$\zeta = \left(1.09 + \frac{45}{(2r)^2}\right) \cdot \frac{u^2}{2g} \qquad [7]$$

die andere den Verlust auf eine unendliche Länge vom Knie abwärts

$$\zeta = \left(1.30 + \frac{53.5}{(2r)^2}\right) \cdot \frac{u^2}{2g} \qquad [8]$$

MONTANARIS Versuche wurden an rechtwinkligen Knieröhren ausgeführt.

Williams, Hubbel und Frenkell (15) gingen bei ihren Arbeiten von der Annahme aus, daß einer Wasserleitung von 80 D (D = Durchmesser) Länge ein 90°-Krümmer vorgeschaltet sei. Sie gaben dem Krümmer verschiedene Bogenlängen und fanden dabei, daß 4 D Bogenlänge die vorteilhafteste sei. Mit der Länge des Bogens wuchs nach ihren Darlegungen die Verlustziffer, weil im Krümmer die entstandene Wirbelung leichter und länger unterhalten wurde.

Brightmore (16) zeigte, daß die Druckverluste bei der Bogenlänge b = 4 D unabhängig von der Rohrweite, dagegen abhängig von der Geschwindigkeit und der Wandrauhigkeit waren.

Ähnliche Problemstellungen finden sich bei Davis (17) und Grindley-Gibson (18), von denen letztere ihre Versuche nicht auf hydraulischem, sondern auf dem verwandten aerodynamischen Gebiete ausgeführt haben.

Die Arbeiten von Grether (19) und Wagenbach (20), welche hier chronologisch folgen sollten, waren leider nicht zu erhalten.

Isaachsen (21) erklärt den Druckverlust im Krümmer aus ganz anderen Gedankengängen heraus. Im geraden Rohrteil haben die Wasserteilchen der Kernströmung die größte Geschwindigkeit. Kommt nun ein solcher Wasserstrom in einen Krümmer hinein, so geschieht es, daß die Wasserteilchen eine notwendige Umlenkung erfahren. Durch die Ablenkung der Wasserfäden werden Zentrifugalkräfte erzeugt, die dem Geschwindigkeitsquadrat proportional sind. Da nun bereits im geraden Rohr über den Querschnitt verschiedene Geschwindigkeiten herrschen, müssen auch die Zentrifugalkräfte im Krümmer unterschiedliche Größen und Wirkungen zeigen. Die schnelleren Wasserteilchen drängen in die langsameren hinein und schieben diese von der Wandung weg nach innen. Im Krümmerquerschnitt entstehen so die Sekundärströmungen. Sie „setzen sich mit der Hauptströmung zusammen, so daß die Wasserteilchen schraubenähnliche Bahnen beschreiben" (l. c. S. 216). Isaachsen schließt jeden Parallelismus der Wasserfäden im Krümmer aus und hält ihn grundsätzlich für unmöglich. „Stromablenkungen ohne Sekundärströmungen gibt es überhaupt nicht." (l. c. S. 216.)

Die Sekundärströmungen üben auf den Wasserstrom hemmende Wirkungen aus (l. c. S. 432), die man allgemein als Reibungsverluste bezeichnet. Auch die Wandrauhigkeit löst bedeutende Sekundärströmungen aus und vergrößert damit zugleich den Druckverlust im Krümmer (l. c. S. 432).

Den Untersuchungen von Lell (22), der sich auch mit den Sekundärströmungen des Krümmers befaßte, läßt sich entnehmen, daß diese Nebenströmungen als Doppelwirbel auftreten.

Lell zählt als weitere Verlustquellen auf:

1. die stetige Änderung des Wirbelzustandes während der Durchflußperiode,
2. die wiederholte, gleichzeitig nebeneinander stattfindende Umsetzung von Druck in Geschwindigkeit und umgekehrt,
3. die sekundären Strömungen, die einerseits Druckhöhe verbrauchen, andererseits eine Querschnittverengung verursachen, welche zur Erhaltung der Kontinuität die Hauptströmungsgeschwindigkeit vergrößert und dadurch weiteren Energieaufwand verlangt.

Lell beobachtete den größten Druckunterschied zwischen Innen- und Außenwand vor dem Krümmerscheitel.

Lechner (23) verfolgte den Turbulenzeintritt, wenn die Flüssigkeit durch spiralförmig gewundene Kapillaren strömte. Der Eintritt der Turbulenz soll durch die im Krümmer ausgelösten Zentrifugalkräfte stark begünstigt werden. Die kritische Reynoldssche Zahl wird nach dem Autor nach kleineren Werten verschoben, wenn der Kapillarradius größeren Durchmesser annimmt. Schiller (24) spricht dieser Strömungsart den turbulenten Zustand ab, weil sie als eine geordnete Querbewegung nach Art der im turbulenten Stadium beobachteten Sekundärströmungen angesehen werden müsse. „Diese (Querbewegung) wirkt notwendig widerstandserhöhend und verwischt den Übergang zur Turbulenz." (Schiller l. c.)

Auch HINDERKS (25) versuchte die in einem Krümmer bei größeren Geschwindigkeiten stets vorhandenen Nebenströmungen und Querwirbel abzuklären. Er bestrich die gläserne Deckplatte des Versuchskrümmers mit einer von Wasser schwer lösbaren Farbe. Bei genügend großen Geschwindigkeiten wurde die noch nicht ganz eingetrocknete Farbe nach ganz bestimmten Richtungen in Form von winzigen Wirbeln weggeschwemmt. An der Innenwand, in der Nähe des Krümmerscheitels, drängten sich die Stromlinien zusammen. Im Gebiet nach dem Scheitelpunkt bildete sich der eigentliche Doppelwirbel aus, weil außen eine Beschleunigung und innen eine Verzögerung eintrat. Dieser Wirbel wurde auch noch begünstigt durch die Neben- bzw. Sekundärströmungen. LELLS (l. c.) Ergebnisse wurden durch diese Experimente bestätigt, denn er hatte schon hinter dem Krümmerscheitel eine Ablenkung der Strombahnen nach innen gefunden, was praktisch auf die Bildung von Neben- und Querwirbeln hinauslief. LELL (l. c.) hatte damals verdichtete Luft durch feine Düsen an verschiedenen Stellen und in verschiedenen Schichthöhen eines Kreiskrümmers von 180° und rechteckigem Querschnitt eingeblasen und so die Strömung sichtbar gemacht.

Die von HINDERKS (l. c.) erwähnten Doppelwirbel müssen beim Krümmer samt den Nebenströmungen als Verlustarbeit in Rechnung gezogen werden. „Ihren genauen Verlauf aber zu erfassen, dürfte sehr schwer sein" (HINDERKS, S. 1779).

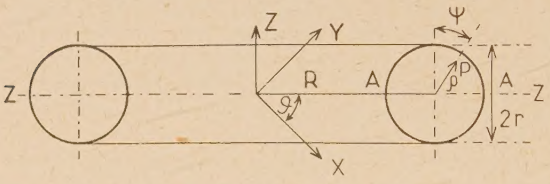


Abb. 5

SCHILLER (l. c. S. 178) führt bei der Kritik zur Arbeit von HINDERKS aus, daß das Entstehen von Doppelquerwirbeln verständlich sei, weil die schneller bewegten zentralen Flüssigkeitsteilchen im Krümmer durch die Zentrifugalkraft gegen die äußerste Wand gedrängt werden, wo sie ihrerseits die langsameren Teilchen wieder verdrängen. Aus Symmetriegründen bewegen sich diese weggestoßenen Teilchen oben und unten an die Innenwand hin. Mit der fortschreitenden Bewegung zusammen entwickelt sich so die früher bei ISAACHSEN (l. c.) schon erwähnte doppelschraubenförmige Strömung.

DEAN (26) behandelt die Krümmerströmung streng hydrodynamisch durch Integration der NAVIER-STOOKEschen Differentialgleichungen für zähe Flüssigkeiten. Die Lösung gilt unter der Voraussetzung, daß $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ gegen $\frac{r}{R}$ vernachlässigt werden kann, also nur für relativ schwache Krümmungen und für Geschwindigkeiten, die unterhalb der kritischen liegen. Überdies wird der Übergang vom geraden in den gebogenen Rohrteil von der Theorie natürlich nicht erfaßt (Voraussetzung einer unendlichen Spirale). Um die Gleichungen zu lösen, wird ein den geometrischen Verhältnissen des Problems angepaßtes Koordinatensystem verwendet (Abb. 5).

Irgend ein Punkt P im Rohrinneren wird durch den Abstand ϱ von der Rohrachse, den Azimutwinkel ϑ und den Winkel ψ festgelegt. Die entsprechenden Geschwindigkeiten sind: U, V, W; wo

$$U = \frac{d\varrho}{dt},$$

$$V = \varrho \frac{d\psi}{dt},$$

$$W = (R + \varrho \sin \psi) \frac{\delta\vartheta}{\delta t} \qquad [9]$$

Das resultierende Stromlinienbild ist ein sehr merkwürdiges. Betrachten wir vorerst das Bild in einem Querschnitt senkrecht zur Rohrachse (Resultierende aus den Komponenten U, V), so erhalten wir das in Abb. 6 gezeichnete Strömungsbild.

Die der Zentralebene Z ..... Z benachbarten Flüssigkeitsteilchen werden durch die Zentrifugalkraft nach außen gedrückt, weichen, wenn sie sich der äußeren Wand nähern, z. T. nach oben, z. T. nach unten aus, und müssen infolge Inkompressibilität an der Ober- und Unterseite wieder zurücklaufen. Durch Überlagerung mit der Vorwärtsbewegung in Richtung der Rohrachse (W-Komponente) entstehen dann sowohl in der unteren wie in der oberen Rohrhälfte getrennte schraubenförmige Bewegungen.

Die „Ganghöhe" dieser Schrauben nimmt mit abnehmender mittleren Strömungsgeschwindigkeit zu, da die Rotationsgeschwindigkeit in noch stärkerem Maße abnimmt als die mittlere Geschwindigkeit in der Rohrachse. Von der vorliegenden Theorie dürfte das Strömungsbild richtig wiedergegeben werden. Die Erfahrungstatsache, daß auch ein schwach gekrümmtes Rohr gegenüber einem gestreckten Rohr gleicher Abmessungen erhöhten Strömungswiderstand aufweist, wird jedoch von der vorliegenden Theorie nicht wiedergegeben.

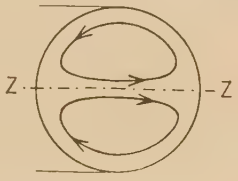


Abb. 6

In einer weiteren Arbeit entwickelt Dean eine Näherungslösung, die der Tatsache Rechnung trägt, daß ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen bei dem erwähnten schraubenförmigen Umlauf abwechselnd in Gebiete mit großer und solche mit kleiner Strömungsgeschwindigkeit gerät. Da es sich um eine Flüssigkeit mit innerer Reibung handelt, ist damit ein Energieverlust verbunden, der sich als zusätzlicher Strömungswiderstand äußert. Bezeichnet man als Widerstandskoeffizienten das Verhältnis der Durchflußmenge im gekrümmten zu derjenigen im entsprechenden geraden Rohr, so findet Dean, daß dieses Verhältnis eine Funktion einer einzigen Variablen K ist, wo

$$K = \frac{h^2 \cdot r^7 \cdot \varrho^2}{\mu^4 \cdot R} \qquad [10]$$

und h den Druckabfall im betrachteten Rohrabschnitt bedeutet. Es existiert also eine Art Ähnlichkeitsprinzip in dem Sinne, daß 2 verschieden gekrümmte Röhren mit verschiedenen Abmessungen r, r′; R, R′ verschiedener Zähigkeit μ, μ' und verschiedener Dichte der Füllung ϱ, ϱ' bei verschiedenen Druckgradienten h, h′ dann den gleichen Widerstandskoeffizienten aufweisen, wenn

$$\frac{h^2 \cdot r^7 \cdot \varrho^2}{\mu^4 \cdot R} = \frac{h'^2 \cdot r'^7 \cdot \varrho'^2}{\mu'^4 \cdot R'} \qquad [11]$$

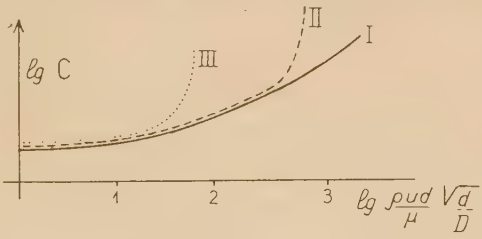


Abb. 7

Dieses Gesetz wird durch experimentelle Untersuchungen von Eustice (27) an einem Kautschukschlauch, der sowohl in gestreckten als in verschiedenen „aufgewickelten" Zuständen untersucht wurde, bestätigt. Noch aufschlußreicher war ein Vergleich der Theorie mit Messungen von White (28) mit verschieden gekrümmten Rohrspiralen verschiedenen Querschnittes. In der genannten Arbeit sind die aus den Beobachtungen errechneten Widerstandskoeffizienten C in Abhängigkeit von der erwähnten Variablen aufgetragen (White benützt die äquivalente Variable

$$K = \frac{\varrho \cdot u \cdot d}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{d}{D}} = Re \sqrt{\frac{d}{D}}, \qquad [12]$$

wodurch die Ähnlichkeit mit der Reynoldsschen Zahl noch stärker zum Ausdruck kommt. Die Kurven zeigen etwas schematisch gezeichnet den in Abb. 7 dargestellten Verlauf. Sie weichen für die einzelnen Röhren bei bestimmten kritischen

$$\frac{\varrho \cdot \bar{u} \cdot d}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{d}{D}} \qquad [13]$$

-Werten von der gemeinsamen Kurve ab. Diese Abweichungen dürften dem Übergang zu turbulenter Strömung entsprechen. Die Krümmungsverhältnisse für die Röhren sind folgende:

Tabelle 1

n^r	I	II	III
$\frac{d}{D}$	$\frac{1}{15{,}15}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{2050}$

Für stärkere Krümmungsverhältnisse $\frac{d}{D} > 0{,}1$ wird eine analytische Behandlung des Problemes aussichtslos.

Frank (29) versucht unter Annahme konzentrischer (in bezug auf den Krümmungsmittelpunkt) und zylindrischer Stromröhren aus den Zentrifugalkräften, welche die einzelnen Stromröhren aufeinander ausüben, einen Druckabfall zwischen der äußeren und inneren Wandschicht abzuleiten. Die Geschwindigkeiten müßten sich dann auf die einzelnen Stromröhren offenbar so verteilen, daß die Bernouillische Gleichung erfüllt ist. Vom theoretischen Standpunkte aus ist dieses Verfahren wohl willkürlich.

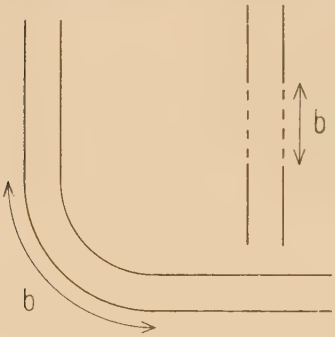


Abb. 8

In die oben behandelten Faktoren, welche den Druckverlust verursachen, bezieht Lorenz (30) als Verlustquelle das Druckgefälle noch ein, das zur Überwindung der turbulenten Wandreibung nötig ist. Er führt in der Widerstandsgleichung die Wandrauhigkeit als mitbestimmenden Faktor ein, der nun bei allen weiteren Arbeiten speziell berücksichtigt wird.

Nach Hofmann (31) wird der durch einen Rohrkrümmer hervorgerufene Verlust als Unterschied zwischen dem Druckverlust in einer Rohrleitung, die den Krümmer enthält, und dem einer gleich langen geraden Rohrstrecke von gleicher Lichtweite und gleicher Rauhigkeit definiert. In diesem Fall wird zuerst der Versuch an einem gekrümmten System durchgeführt, dann aber das System um den Gradbetrag des Krümmungswinkels gedreht und somit an einer geraden Leitung weiter experimentiert (Abb. 8).

Nippert (32) ergänzt die bisher bekannten Beobachtungen am Krümmer durch einige Faktoren, die an der Verlustbildung wesentlich beteiligt sind (Ablenkungswinkel α; Verhältnis: Krümmungshalbmesser zum Radius des Krümmers; Querschnittsform; Querschnittsfolge — Verengerung und Erweiterung — in der Stromrichtung; Wandrauhigkeit; mittlere Durchflußgeschwindigkeit; Zähigkeit des Mittels; die dem Krümmer vorgeschaltete Kanalstrecke; Verhältnis der Schallgeschwindigkeit zur mittleren Durchflußgeschwindigkeit). Er hat nur zahlenmäßige Unterschiede zwischen 90°- und 180°-Krümmern gefunden. Die beobachteten Gesetzmäßigkeiten bleiben bei beiden die gleichen. Innerhalb des Versuchsbereiches hat Nippert das quadratische Widerstandsgesetz für genügend genau gefunden. Die Abhängigkeit der Verlustziffern von der Zähigkeit des Mittels zeigte sich nach ihm in einem Potenzgesetz von ähnlichem Aufbau.

Forchheimer (33) bestätigt in seiner Kritik zu Weisbachs Theorie, daß eine Vergrößerung des Ablenkungswinkels über 90° den Druckverlust nicht erhöhe, die Ansicht von Nippert (l. c.), daß zwischen 90°- und 180°-Krümmern nicht gesetzmäßige, sondern nur numerische Unterschiede beständen.

Richter (34) benützte als Rohrkrümmer glattes, gezogenes Kupferrohr. Er untersuchte den Druckabfall im Krümmungsgebiet allein und stellte die dazu entsprechenden

Widerstandsziffern auf. Seine Resultate dürfen nicht ohne Vorbehalt aufgenommen werden, da er einerseits die Druckentnahmestellen bei den verschiedenen gebrauchten Krümmern nicht nach einem fixen Schema anordnete und andererseits den in den Ablauf hineingetragenen Krümmerverlust unbeachtet ließ. Als wichtiges Faktum muß an Richters Arbeit festgehalten werden, daß für größere Reynoldssche Zahlen der Umlenkungsverlust kleiner ausfällt als für kleine Reynoldssche Zahlen.

Gregorig (35) bestimmte für sehr hohe Reynoldssche Zahlen den Krümmerverlustkoeffizienten bei veränderlichem Krümmungsverhältnis. Er definierte wie Hofmann (l. c.) den Krümmerverlust als denjenigen Zusatzverlust, der entsteht, wenn eine gerade Rohrleitung im Krümmersinn gebogen wird. Die großen Diskrepanzen zwischen den einzelnen Autoren führt Gregorig auf 3 Faktoren zurück:

1. Verschiedenheit der Reynoldsschen Zahlen;
2. Nichtberücksichtigung der An- und Ablaufeffekte;
3. Verschiedene relative Rauhigkeitsgrade der Wandung.

In einem Glasmodell der menschlichen Aorta untersuchte Timm (36) die Strömungsverhältnisse, indem er in die Strömung einen Farbfaden einführte und so die Strombahnen sichtbar machte. Zahlreiche photographische Aufnahmen zeigen deren komplizierten Verlauf. Das Bild der Strömung im Timmschen Modell wird besonders verwickelt durch den Einfluß, welchen die seitlich abzweigenden, im Modell eingebauten Gefäße verursachen.

II. Aufgabe der vorliegenden Arbeit

Die Haemodynamik fordert eine Aufklärung der Strömungsverhältnisse im Aortenbogen. Dieser Krümmer besitzt bei Tieren, die für haemodynamische Versuche in Betracht kommen, und beim Menschen für das Verhältnis

$$\frac{\text{Rohrradius}}{\text{Krümmungsradius}} = \frac{r}{R}$$

eine Zahl, die zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ liegt.

Nach unserem Ermessen scheint eine theoretische Abklärung der Strömungsphänomene im Krümmer ohne vorausgegangene experimentelle Aufklärung nicht möglich. Auch die Arbeiten von Deans (l. c.) zeigen, daß eine strenge, theoretische Behandlung der in einem Krümmer erzwungenen Strömung nur unter der Bedingung möglich ist, daß

$$\frac{r^2}{R^2} \text{ gegenüber } \frac{r}{R}$$

vernachlässigt werden darf. Bei unserem gegebenen Krümmer ist diese Bedingung nicht erfüllt und damit scheint eine theoretische Behandlung wenig erfolgreich.

Aus diesem Grunde sollen in dieser Arbeit sowohl der Druck- und Geschwindigkeitsverlauf als auch der zusätzliche Widerstand auf experimentellem Wege so weit als möglich ermittelt werden.

Theoretische Überlegungen und die Versuchsergebnisse führten zur Aussonderung bestimmter Typen von Strömungsformen, die nun der Reihe nach beschrieben werden.

III. Untersuchungsmethode

1. Versuchsanordnung

Die Versuchsanlage mußte eine gleichmäßige stationäre Strömung in einem bestimmten laminären Bereiche ermöglichen.

Aus dem Trog T wurde die Versuchsflüssigkeit, Glyzerin, in das höher gelegene Reservoir R gepumpt. Aus dem Reservoir R, das einen konstanten Überlauf hatte, konnte die Flüssigkeit ins Auslaufrohr A und von dort in den angeschlossenen Krümmer K fließen. Der Abfluß in den Trog T erfolgte durch

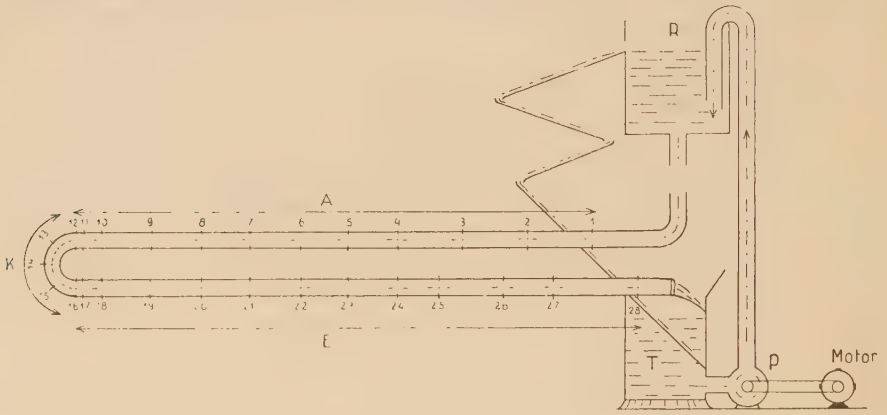


Abb. 9

das Ablaufrohr E. Zur Verhütung einer Durchmischung mit Luft und damit zur Aufrechterhaltung einer bestimmten Strömungsart wurde jeder freie Flüssigkeitsfall nach Möglichkeit vermieden. Das Glyzerin ergoß sich unter der Behälterniveaulinie ins Reservoir R, während der Überlauf in den Trog T über schräggestellte Kännel erfolgte (Abb. 9).

Der Flüssigkeitsstand im Reservoir R konnte außen an einer kommunizierenden Röhre beobachtet werden. Im Reservoir R befand sich ein auf 1/10° C geeichtes Thermometer, an dem vor, während und nach jedem Versuch die Temperaturen abgelesen wurden. Um Winkelstücke zu verhüten und das auf einer Konsole verschiebbare Reservoir R mit dem festmontierten, horizontal gelagerten Röhrensystem zu verbinden, wurde das Anlaufrohr A mit dem Reservoir R durch einen passenden, wenig dehnbaren Gummischlauch von 150 cm Länge verbunden. Besondere Beachtung wurde den Rohranschlüssen geschenkt, um die Voraussetzung zu Wirbelbildungen möglichst zu verringern. Die Verbindungen sind so konstruiert, wie es Abb. 10 veranschaulicht. Zwischen A und B ist an das Stahlrohr ein konisch abgedrehtes Messingrohr von gleicher Weite eingesetzt. Da der innere Rohrdurchmesser gleich dem Schlauchdurchmesser ist, bleibt der

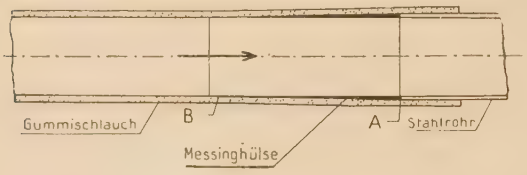


Abb. 10

Querschnitt überall derselbe. Die Wandstärke des Messingrohres betrug am zugespitzten Ende nur noch 0,01 cm, so daß die Innenwand praktisch glatt blieb. Da zudem die Stelle B fest an den Schlauchwänden auflag, verminderte sich die Störungsgefahr für den laminären Zustand der Flüssigkeit noch mehr.

Der innere Rohrdurchmesser betrug überall 2,40 cm. Dieses Maß wurde mit Rücksicht auf physiologische Verhältnisse gewählt. Es entspricht einem mittleren Durchmesser des Aortenbogens beim Menschen. Dieser Wert wurde den anatomischen Tabellen von VIERORDT (37) entnommen.

2. Strömungsbeobachtung

Die experimentellen Untersuchungen der Strömungsverhältnisse in diesem Krümmer wurden mit der Beobachtung der einzelnen Strömungsbilder begonnen. Zur Anwendung kam die übliche Farbfadenmethode, die von REYNOLDS (38) eingeführt worden ist. Das An- und Ablaufrohr, sowie der Krümmer waren für diese Versuche aus Glas, um den Farbfaden über größere Strekken verfolgen zu können. Das rechtwinklig gebogene Kapillarrohr wurde derart in das Anlaufrohr eingesteckt, daß seine feine Öffnung unmittelbar im Rohrquerschnitt vor der Krümmung lag. Die Kapillare war von außen her so verschiebbar, daß ihre Öffnung an jeden beliebigen Punkt des Rohrquerschnittes gebracht werden konnte. (Abb. 11).

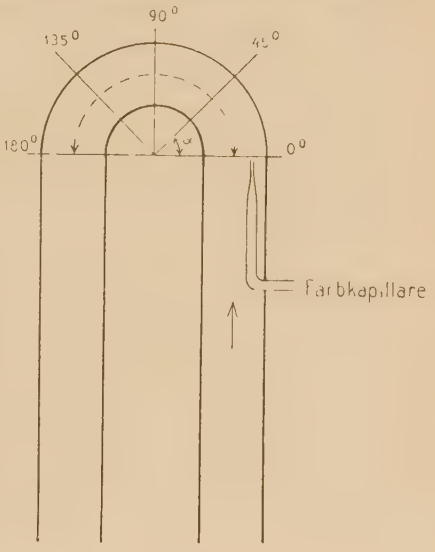


Abb. 11

Für die Beobachtung von komplizierten Strömungsformen wurden oft auch 2 Kapillaren eingeführt und so zugleich zwei Farbfäden betrachtet. Die Formung des Farbfadens konnte bei seinem Austritt in die Strömung durch Regulierung des Zuflusses aus dem Farbstoffreservoir besorgt werden. Als Färbungsmittel verwendeten wir Methylenblau, das dem Glyzerin gleicher Dichte wie die Versuchsflüssigkeit zugemischt wurde.

Der Glaskrümmer lag in einem glyzeringefüllten parallelwandigen Glaskasten. Damit konnte man die unverzerrten Strombahnen der gefärbten Flüssigkeit gut beobachten.

Der „Krümmer" bestand aus zwei Teilen, dem eigentlichen Krümmungsbogen, der eine Achsenlänge von 11,80 cm besaß, und zwei auf beiden Seiten angeschlossenen geraden Schenkeln, die je 19,55 cm lang waren. Als Krümmer verstehen wir in unserer Arbeit nur den einen Halbkreisbogen bildenden Krümmungsbogen von 11,80 cm Länge. Die Lage der Farbfäden wurde in fünf bestimmten Querschnitten genau beobachtet. Diese Querschnitte sind auf Abb. 11 eingezeichnet und werden zukünftig mit dem entsprechenden Winkel α bezeichnet, den der in Richtung zum Krümmungszentrum gezogene Durchmesser mit der Grundlinie bildet.

Da eine Wiedergabe aller Stromfadenbilder einen Überblick erschweren würde, werden besonders instruktive Bilder im Zusammenhang mit den übrigen Versuchsresultaten beschrieben.

3. Druckmessungen

a) An- und Ablaufrohr

Für die Druckmessungen wurde die Anlage neu aufgebaut. An Stelle der gläsernen An- und Ablaufrohre traten solche aus Stahl. Das Innere der Stahlrohre wurde vor der Montage auf seine Rauhigkeit geprüft und mit petrolgetränkten Putzfäden sauber gereinigt. Die Anlaufstrecke vor dem Krümmer maß von Manometer 1—12: 400,50 cm, die Meßstrecke nach dem Krümmer von Manometer 16—28: 411,60 cm. Die Gesamtlänge des Systemes war, unter Einrechnung des 11,80 cm langen Krümmers, 823,90 cm. Die Erfahrungen aus früheren Arbeiten am physiologischen Institute beim Bau von Piezometern sind in unserer Arbeit ausnahmslos verwertet worden. Die in die Stahlröhre gebohrten Löcher zum Ansetzen der Piezometer lagen genau senkrecht zur Wandung. Auf die Ausbohrung des Bohrloches und die Entfernung des Bohrgrates im Rohrinnern wurde große Sorgfalt verwendet, weil kantige Vorsprünge und rauhe Umrandungen die Strömung nachteilig und die Druckmessungen falsch beeinflussen können. Auf das Bohrloch wurde ein Ansatzstück gelötet, über das man einen Gummischlauch stülpte, der das Ansatzstück mit dem gläsernen Steigrohr verband. Der innere Durchmesser der Steigrohre war überall gleich groß und betrug mit Rücksicht auf die Kapillarität 12 mm.

b) Krümmer

Der Glaskrümmer wurde durch einen solchen aus Gummi ersetzt. Das hatte seine besonderen Gründe. Das Anbringen von vielen Löchern zum Einsetzen der Piezometer (in unserem Falle 20 Druckmeßstellen) ist bei einem Glaskrümmer mit den gegebenen Dimensionen ohne Deformation desselben technisch nicht ausführbar. Auch auf die Anwendung eines Messing- oder Stahlkrümmers mußte verzichtet werden, nachdem die Fabrikation von den in Betracht kommenden Firmen abgelehnt worden war. Die Wahl fiel darum auf einen Gummikrümmer, nicht nur der leichteren Herstellung wegen, sondern auch weil er besonders geeignet schien für die späteren Geschwindigkeitsmessungen, bei denen man mit feinen medizinischen Kanülen das Profil abtasten mußte. Da man diese Kanülen durch die Krümmerwand einstechen wollte, war also eine Gummiwand sehr zweckentsprechend.

Zuerst wurde ein Krümmermodell in Holz ausgeführt. Seine Dimensionen entsprachen dem Innern des Glaskrümmers. Auf beiden Seiten waren dem Krümmer die entsprechenden geraden Schenkel angeschlossen. Dieses Holzmodell ist von der Firma Lonstroff, Genève-Carouge, S.A., benützt worden, um die Gummikrümmer herzustellen. Sie waren alle aus Paragummi angefertigt, innen vollkommen glatt und außen vulkanisiert. Bei den in unseren Versuchen vorkommenden Drucken haben sie keine Deformationen erlitten. Für die Druck- und Geschwindigkeitsmessungen sind nur die besten Exemplare ausgewählt worden. Sie zeichneten sich durch schönen runden Rohrquerschnitt und solide Wandung aus.

Die Ansatzstellen für die Piezometer bzw. Druckstutzen am Gummikrümmer zeigten eine etwas andere Konstruktion als die der geraden stählernen Rohrteile (Abb. 12).

Mit einem Stanzrohr wurde aus der Krümmerwand ein Loch gestanzt (Durchmesser: 2 mm). Der Druckstutzen haftete an der Innenwand vermittels eines sehr dünnen Flansches. Außen besaß der Stutzen ein Gewinde, in dem eine Schraubenmutter lief, mit der man eine Abdichtungsscheibe auf die Außenwand pressen und den Flansch fest an die Innenwand ziehen konnte. Die Störungsgefahr für die strömende Flüssigkeit war bei solcher Konstruktion sehr klein.

Gleichartige Übergänge, wie die auf S. 290 beschriebenen, zwischen Gummischlauch und Anlaufstrecke waren auch den beiden Rohrenden aufgelötet, welche Stahlröhre und Krümmer verbanden. Das geschliffene Ende des Propfens an der Stahlröhre steckte im geraden Schenkel des Krümmers. Die Flüssigkeit kam demnach störungsfrei in den Krümmer hinein.

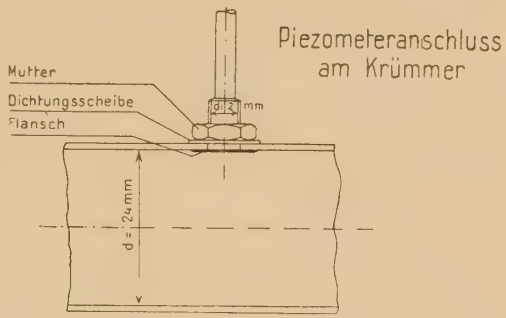


Abb. 12

Zur Ermittlung des Druckgefälles wurden bei den Versuchen zuerst die Flüssigkeitszustände im Reservoir R und an sämtlichen Steigrohren bei ruhender Flüssigkeit und verschlossenem Rohrende abgelesen. Darauf wurde der Verschluß geöffnet und die Flüssigkeitsstände bei stationärer Strömung erneut abgelesen. Die Differenz zwischen beiden Messungen gab den Druckhöhenverlust h.

c) Bestimmung der Dichte ϱ und Zähigkeit μ

Da in dieser Arbeit Strömungen mit niederen Reynoldsschen Zahlen untersucht werden mußten, waren nur kleine Strömungsgeschwindigkeiten erlaubt und deshalb auch niedrige Druckdifferenzen zu erwarten. Um trotzdem zuverlässige Messungen durchführen zu können, wählten wir eine relativ hoch viskose Flüssigkeit. Die Viskosität ist aber sehr stark temperaturabhängig. Das Lokal, in dem die Versuche durchgeführt werden mußten, eignete sich als solches nicht besonders zur Aufrechterhaltung einer konstanten Temperatur. Ferner mußte berücksichtigt werden, daß nicht nur der das Pumpwerk treibende Motor als Wärmestrahler, sondern auch die mit der Strömung verbundene Reibung die Flüssigkeit dauernd erwärmte. Nach längeren Voruntersuchungen stellte es sich heraus, daß man mit einer Schwankungsbreite von 2°—3° C rechnen mußte.

Während die Dichte pro 1° C um 0,03 % änderte, zeigte die Viskosität eine mittlere Abnahme um 5 % pro 1° C Wärmezunahme. Um nun die zeitraubenden Viskositätsmessungen, die gleichzeitig mit den Strömungsversuchen hätten durchgeführt werden müssen, zu umgehen, wurden zwei quasi unveränderliche Flüssigkeiten mit den Dichten 1,2 und 1,1935 bei einer Temperatur von 20° C benützt. Für diese Flüssigkeiten wurden Diagramme aus mehreren Versuchsreihen aufgestellt, welche die Zähigkeit als Funktion der Temperatur darstellten. Bei den Versuchen konnte demnach aus der Temperatur der Flüssigkeit, die fortlaufend registriert wurde, die entsprechende Viskosität abgelesen wer-

den. Die Konstanz der Flüssigkeit wurde täglich vor Beginn der Versuche überprüft, indem die Dichte ϱ der Flüssigkeit mit Präzisionsaräometern bei einer Temperatur von 20° C gemessen und eventuell durch Zusatz von Wasser oder Glyzerin korrigiert wurde.

4. Geschwindigkeitsmessungen

a) Bestimmung der mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$

Die mittlere Geschwindigkeit u wurde aus der Ausflußmasse M, deren Gewicht gemessen wurde, berechnet. Es gilt die Beziehung

$$\bar{u} = \frac{M}{q \cdot \varrho \cdot t} \qquad [14]$$

wo q den Rohrquerschnitt bedeutet.

b) Bestimmung der örtlichen Geschwindigkeit u

Bei den Geschwindigkeitsmessungen wurde das Pitotprinzip angewendet. Dieses Prinzip beruht darauf, daß im gleichen Rohrquerschnitt der statische Wanddruck (p_s) und, mit einer gegen die Strömung gerichteten Kanüle, der Gesamtdruck (p_g) gleichzeitig gemessen werden. Die Differenz

$$p_g - p_s = \frac{\varrho \cdot u^2}{2} \qquad [15]$$

wird Staudruck genannt. In den vorgenommenen Untersuchungen ist stets der Höhenunterschied der beiden Flüssigkeitsmenisken in den Steigrohren abgelesen worden. Es ist dann

$$h = \frac{p_g - p_s}{\gamma} = \frac{u^2}{2g} \qquad [16]$$

weil $\gamma = \varrho \cdot g$.

Aus der Aufstauhöhendifferenz h kann also die Flüssigkeitsgeschwindigkeit bequem berechnet werden, weil

$$u = \sqrt{2\,g\,h} \qquad [17]$$

Als Kanülen wurden hierzu feine medizinische Kanülen mit einem Innendurchmesser von 2 mm verwendet. Die Kanüle zur Messung des Gesamtdruckes war stromgerecht gekrümmt und lag, gegen die Strömung gerichtet, mit ihrer Öffnung genau in dem Rohrquerschnitt, in dem der statische Druck mit der zweiten Kanüle gemessen wurde. Die erste Kanüle wurde, weil der Gummikrümmer für diese Messungen keine Stanzlöcher aufwies, durch die Wand eingesteckt. Außen war das Pitotröhrchen auf einem Support befestigt. Mit einer Mikrometerschraube konnte sein Abstand von der inneren Rohrwand auf $^1/_{10}$ mm genau eingestellt werden. Damit der Krümmer selbst durch das Einstechen und nachherige Verschieben der Kanülen keine Deformation erlitt, hatte man ihn durch passende Fixation auf der Innenseite des Krümmerbogens gesichert.

Nach den Erfahrungen von Müller (39) muß bei Messungen in engen Röhren streng beobachtet werden, daß die Messung des Gesamtdruckes und des statischen Druckes genau im gleichen Rohrquerschnitt erfolgt und die eingeführte Kanüle einen möglichst kleinen Querschnitt besitzt, um das Strömungsbild nicht zu stören. Dieses Postulat der engen Kanüle einerseits und der hoch viskösen Flüssigkeit andererseits beanspruchte für die Einstellung

der Niveaus in den Steigrohren sehr große Zeiten. Bei versuchsweisen Messungen im Krümmer wurden mit dieser Methode Einstellzeiten zwischen 15 und 30 Minuten verzeichnet.

Wir benützten daher für unsere Messungen ein im Institut konstruiertes Differentialmanometer mit elektrischer Transmission. Bei diesen Manometern waren die Zuleitungsrohre starr und der Innenraum sehr klein. Die Manometermembran war sehr steif, so daß das Verdrängungsvolumen nur wenige mm^3 betrug. Das Manometer wurde kritisch gedämpft. Die Einstellzeit betrug für die benützten Kanülen wenige $^1/_{100}$ Sekunden. Die Membranausschläge wurden ungefähr 100000mal vergrößert, so daß Druckdifferenzen von 1 mm Flüssigkeit leicht ablesbar waren. Die Eichung der Manometer erfolgte vor und nach jedem Versuche. Die Galvanometerausschläge waren dem Druck direkt proportional.

Im An- und Ablaufrohr, in denen die Geschwindigkeit mit dem beschriebenen Manometer mit elektrischer Transmission vorerst gemessen wurde, konnte nachgewiesen werden, daß in diesem Rohrabschnitt laminäre Strömung mit parabolischem Geschwindigkeitsprofil herrschte und rückschließend auch die neue Meßmethode als einwandfrei bestätigt werden. Die Profile im Krümmer wurden jeweils in dem Rohrquerschnitt aufgenommen, in dem der Schenkel des betreffenden Ablenkungswinkels α lag. In den Ablenkungswinkeln $\alpha = 0°$, 45°, 90°, 135°, 180° sind die Geschwindigkeitsprofile horizontal und vertikal von Wand zu Wand gemessen worden.

Besondere Schwierigkeiten brachte das im Krümmer vorhandene Profil des statischen Druckes. Aus den vorausgehenden wandständigen Druckmessungen ging hervor, daß der statische Druck im gleichen Querschnitt nicht mehr konstant blieb, sondern an den Stellen desselben Querschnittes änderte. Es mußte deshalb der statische Druck mit einer stromliniengerecht gekrümmten Kanüle, deren Loch seitlich angebracht war, über den gesamten Querschnitt gemessen werden. Diese Methode ist nicht ganz einwandfrei, weil das Einbringen dieser engen Sonden besonders in der Nähe der Wand das Strömungsprofil örtlich etwas veränderte. Dieser Fehler hätte bei Benützung einer Rohrleitung mit größerem Rohrquerschnitt noch weiter reduziert werden können. Die Raumverhältnisse ließen leider eine derartige Anlage nicht zu.

Die Messungen für den statischen Druck mit Sonde und, im gleichen Querschnitt, ohne Sonde haben es trotzdem ermöglicht, den statischen Druck ohne allzu großen Fehler über den ganzen Querschnitt zu bestimmen. Nachdem die Verteilung des statischen Druckes und der mit einer zweiten Sonde im gleichen Rohrquerschnitt gemessene Gesamtdruck bekannt waren, konnte das h, die Druckhöhendifferenz, gemessen, und daraus das u, die örtliche Geschwindigkeit, berechnet werden.

Die Geschwindigkeitswerte u wurden als Funktion des Abstandes der Meßstelle von der Rohrachse (Abb. 13) in passendem Maßstab auf Millimeterpapier aufgetragen. Die Diagramme der horizontalen und vertikalen Messung wurden dann auf Sperrholz durchgepaust und ausgesägt. Das horizontale und vertikale Holzprofil wurden rechtwinklig ineinander gestellt, ihre Zwischenräume mit Plastilin ausgefüllt und damit das Geschwindigkeitsprofil räumlich modelliert. Bei komplizierteren Profilen wurden zur Ergänzung und Überprüfung des konstruierten Modelles Geschwindigkeitsmessungen an anderen passenden Punkten des betreffenden Querschnittes ausgeführt.

Aus dem modellierten Geschwindigkeitsprofil ließ sich der Durchfluß aus der Messung seines Volumens ermitteln. Hierzu wurde das Modell in einen Hohlzylinder, dessen Querschnitt dem Maßstab des Modelles entsprach, gebracht; aus der Wasserverdrängung konnte der Modellinhalt berechnet werden. Da nun das Volumen des modellierten Profiles mit dem Volumen des Ausflusses pro Sekunde übereinstimmen mußte, diente die Ermittlung des Durchflusses gleichzeitig zur Kontrolle der Geschwindigkeitsmessung. Die Differenz

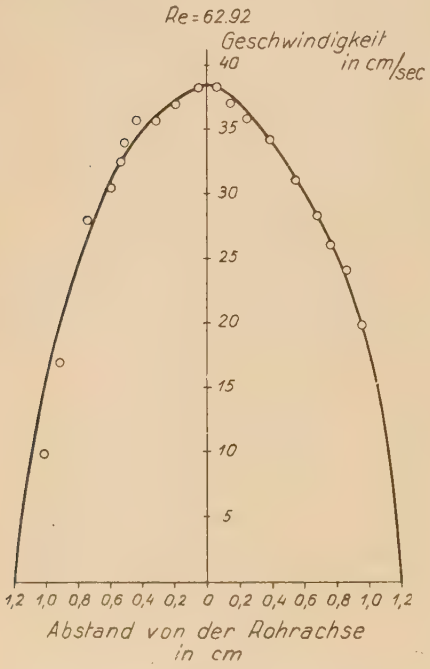


Abb. 13

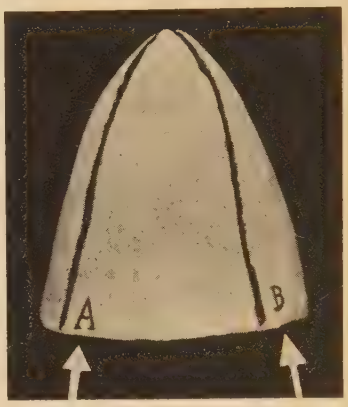


Abb. 14.

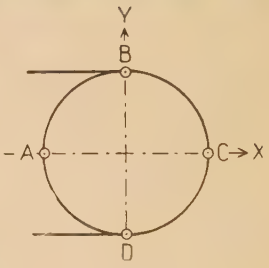


Abb. 15

Abb. 14. Der große Buchstabe *A* bezeichnet die linke oder konvexe Stromseite im Krümmer, d. h. *A* ist identisch mit — x der horizontalen Achse auf der Abb. 15. Der Buchstabe *B* fällt dann zusammen mit + y der genannten Abbildung.

zwischen Modell- und Ausflußvolumen war nie größer als 15 %. Mit Rücksicht auf die sehr komplizierte Strömung im Krümmer und auf das Modellverfahren mit Plastilin durften solche Differenzen toleriert werden. Die Modelle wurden zuletzt in Gips umgeformt und photographiert (Abb. 14).

IV. Ergebnisse

Bei den Versuchen zeigte es sich, wie es übrigens zu erwarten war, daß das Strömungsbild im Krümmer mit Zunahme der Geschwindigkeit stark änderte. Von der quasi Parallelströmung bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen bis zur ausgesprochenen Turbulenz im An- und Ablaufrohr waren die mannigfachsten Strömungsarten im Krümmerbereiche zu beobachten, so daß

es anfänglich als unmöglich erschien, eine einigermaßen sinnvolle Betrachtung anzustellen. Mit fortschreitender Erfahrung ließen sich 3 Haupttypen absondern:

1. die geordnete,
2. die Übergangs- und
3. die turbulente Strömung.

In der vorliegenden Arbeit soll nur der erste Haupttyp, die geordnete Strömung, behandelt werden.

Bei dieser Strömungsform ließen sich die Strombahnen mit der Farbfadenmethode noch in übersichtlicher Weise verfolgen. Sie wird darum geordnet genannt, weil die zugesetzten Farbfäden bei allen Geschwindigkeiten dieses Types im ganzen Verlaufe beobachtet werden konnten. Damit ist der Beweis erbracht, daß die Flüssigkeitssteilchen des gefärbten Fadens, die beim Eintritt in den Krümmer einen Zylinder bildeten, bei der Passage des Krümmers ihre Lage zueinander zwar änderten, aber ihren Zusammenhang aufrecht erhielten.

1. Beobachtung

Für sehr kleine Reynoldssche Zahlen, $Re < 15$, zeigten die in die Strömung abgegebenen Farbfäden in ihrem Verlauf durch den Krümmer keine nennenswerte Änderung der Lage. Der axiale Stromfaden durchzog den Krümmer in der Rohrachse. Desgleichen konnte auch für die 4 übrigen Stromfäden, wandständig — außen und innen, bzw. oben und unten, keine Abweichung von der wandständigen Bahn beobachtet werden. Einzig in der Gegend des Ablenkungswinkels $\alpha = 90°$ war eine Verdickung des wandständig-innern und eine Verjüngung des wandständig-äußern Farbfadens zu sehen. Diese Querschnittänderungen des Farbfadens glichen sich aber schnell wieder aus.

Aus der Beobachtung für diese minimalen Geschwindigkeiten geht hervor, daß die Flüssigkeitsteilchen ihre Lage zur Rohrachse in der Krümmung nur wenig änderten. Daraus folgt, daß die relative Geschwindigkeitsänderung im Krümmergebiet gegenüber dem Parabelprofil im Anlaufrohr eine sehr kleine sein mußte, das Geschwindigkeitsprofil also nahezu unverändert blieb.

Die Stromfadenbilder im Bereiche $Re = 20—80$ lassen sich unter dem Sammelbegriff „Schraubenbewegung" zusammenfassen. Der in der Achsenmitte abgegebene Farbfaden beschrieb eine korkzieherähnliche Bahn. Im Gebiet des Ablenkungswinkels $\alpha = 45°$ wurde er von der Rohrachse nach der Außenwand hin gedrängt. Im Ablenkungswinkel $\alpha = 90°$ konnte er in der unteren Hälfte des Rohrquerschnittes beobachtet werden. Bei $\alpha = 135°$ tendierte er deutlich nach der konvexen Innenwand hin.

Der auf der linken Stromseite, etwa 2 mm von der Rohrwand entfernte Farbfaden, war bei $\alpha = 45°$ in die Rohrachse abgedrängt worden. In dieser axialen Lage verblieb er bis zum Krümmerende. Ein Umbiegen nach oben oder unten fand nicht statt.

Der wandständig-äußere Farbfaden, auf der rechten Stromseite, bog schon am Krümmeranfang nach der unteren Rohrquerschnitthälfte um und verlief bei $\alpha = 45°$ an der Innenwand entlang. Diese Stellung behielt er bei.

Die beiden übrigen Farbfäden, der wandständig-obere und der wandständig-untere, zogen folgende Bahnen: der obere wurde gegen die Achsenmitte abwärts, der untere gegen die Achsenmitte aufwärts gezogen. Beide hatten

Tendenz, näher der Innenwand als der Außenwand entlang zu laufen. Auch der Versuch mit 2 Farbfäden, die gleichzeitig in die Strömung abgegeben wurden, bewies, daß ein Aufbiegen des unteren Farbfadens gegen die Achsenmitte und ein entsprechendes Herabbiegen des andern gegen die Rohrachse tatsächlich vorhanden war.

Als neues Phänomen trat für alle Farbfäden eine gewisse Abplattung auf. Sie verloren bald ihre rundliche Form und gingen im Verlauf ihrer Bahn durch den Krümmer langsam in eine Form über, die flach wie ein Band war.

Die Strömungsbilder für höhere Reynoldssche Zahlen, Re = 80—140, werden von 2 typischen Erscheinungen beherrscht. Es ist einerseits die totale Verflachung und Abplattung der rundlichen Farbfäden und andererseits die vorherrschend zentrifugale Strömungsart. Von einer Schraubenbewegung der Flüssigkeitsteilchen ist kaum mehr etwas zu sehen. Einzig der auf der rechten Stromseite in die Rohrströmung abgegebene Farbfaden beschreibt am Krümmeranfang eine spiralige Bahn. Er biegt zwischen $\alpha = 0°$ und $\alpha = 45°$ gegen oben um. Von dort fließt er der Innenwand entlang und zieht abgeplattet, zwischen Innenwand und Rohrachse durch den restlichen Teil des Krümmers.

Sowohl die Farbfäden wie die in die Flüssigkeit gegebenen suspendierten Teilchen wurden an der konvexen Innenwand im Gebiet des Ablenkungswinkels $\alpha = 90°$ stark abgebremst. Wiederholte Untersuchungen mit Kapillarröhrchen, die es erlaubten, den Farbfaden unmittelbar bis an diese Stelle vorzutragen, ließen erkennen, daß die Geschwindigkeit in diesem konvexen Querschnittsteil minimale Werte annahm.

Fraglos war hier das Gebiet, wo später ein Totwasserbereich auftrat. Diese rotierende Wirbelzone breitete sich mit zunehmender Geschwindigkeit immer weiter aus. Eine solche Strömungsform muß aber bereits zu dem Übergangstyp gerechnet werden, der in dieser Arbeit nicht beschrieben werden soll.

2. Druckmessungen

Aus den zahlreichen Druckmessungen für den geordneten Strömungstyp sind zur Besprechung nur drei Versuchsserien ausgewählt worden und zwar diejenigen bei den Reynoldsschen Zahlen

$$\mathrm{Re} = \sim 10$$
$$\mathrm{Re} = \sim 63$$
$$\mathrm{Re} = \sim 135$$

a) Versuchsserie Re = ∼ 10

Als Flüssigkeit wurde Glyzerin von einer Dichte $\varrho = 1{,}2$ bei 20° C benützt. Der entsprechende Zähigkeitswert für diese Dichte und Temperatur war $\mu = 0{,}4325$.

Für eine gegebene Niveaulinie im Reservoir R betrug der sekundliche Ausfluß 16,290 g. Die daraus berechnete mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}$ war 3,0 cm/sec und die entsprechende Reynoldssche Zahl $\mathrm{Re} = \dfrac{1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 3{,}0}{0{,}4325} = 10.$

Im Experiment wurden die Druckhöhenverluste nur an den Manometern 1 und 12, 16 und 28 abgelesen. Der Niveaustand in den dazwischen liegenden Steigrohren wurde nicht vermerkt, weil das Druckgefälle bei dieser mittleren Geschwindigkeit sehr klein war.

Für den Druckhöhenverlust längs der ganzen Meßstrecke von 1 bis 28 wurde h = 5,04 cm gefunden, und zwar

$$h_a = 2{,}45 \text{ cm (für das Anlaufrohr)}$$
$$h_e = 2{,}52 \text{ cm (für das Ablaufrohr)}$$
$$h_k = 0{,}07 \text{ cm (für den Krümmer)}$$
$$h = 5{,}04 \text{ cm}$$

Der Druckhöhenverlust auf die Längeneinheit bezogen ergab für das

$$\text{Anlaufrohr: } H_A = \frac{2{,}45 \text{ cm}}{400{,}50 \text{ cm}} = 0{,}00611$$

$$\text{Ablaufrohr: } H_E = \frac{2{,}52 \text{ cm}}{411{,}6 \text{ cm}} = 0{,}00612$$

und den

$$\text{Krümmer: } H_K = \frac{0{,}07 \text{ cm}}{11{,}8 \text{ cm}} = 0{,}00612$$

Daraus folgt, daß das Druckgefälle im ganzen Rohrsystem linear verlief, ein Einfluß des Krümmers also nicht erkennbar war.

Unter der Voraussetzung, daß laminäre Strömung vorliegt, kann über das Hagen-Poiseuillesche Gesetz der Druckhöhenverlust auch theoretisch ermittelt werden. Zur Kontrolle ist diese Berechnung in der vorliegenden Arbeit immer durchgeführt und dieser Wert mit h_{ber} bezeichnet worden. Für die erste Versuchsserie stellten sich gar keine Differenzen zwischen berechnetem und experimentell gefundenem Werte ein.

b) Versuchsserie Re $= \sim 63$

Die Dichte und die Zähigkeit der Versuchsflüssigkeit hatten dieselben Werte wie in den vorausgegangenen Versuchen. Für ein bestimmtes eingestelltes Niveau im Reservoir *R* betrug die ausfließende Masse M = 102,600 g bei 20° C. Daraus berechnete sich die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u} = 18{,}87$ cm/sec und die Reynoldssche Zahl Re = 62,92.

Für die beiden geraden Rohrteile wurde ein lineares Druckgefälle gefunden. Der Druckhöhenverlust von Manometer 1 bis 28 betrug 30,20 cm, davon entfielen auf das Anlauf-, das Ablaufrohr und den Krümmer

$$h_a = 14{,}20 \text{ cm}$$
$$h_e = 15{,}30 \text{ cm}$$
$$h_k = 0{,}70 \text{ cm}$$

Auf die Längeneinheit bezogen berechneten sich die obenstehenden Werte für

$$H_A = 0{,}03545$$
$$H_E = 0{,}03717$$
$$H_K = 0{,}05932$$

Bei genaueren Messungen des Druckabfalles im Ablaufrohr zeigte es sich, daß das Druckgefälle im Anfangsteile des Ablaufrohres nicht linear, sondern eine nach unten etwas konvexe Kurve bildete, daß also in diesem Teile eine vermehrte Reibung stattfand. Der Grund hierfür liegt in der Deformation des Geschwindigkeitsprofiles im Krümmer. Das Parabelprofil stellte sich erst nach Passage eines gewissen Rohrstückes wieder ein.

In diesem Phänomen liegt darum die Differenz zwischen H_A und H_E begründet. Sie beträgt hier 4,6 %.

Der Druckhöhenverlust pro Krümmerlänge ist gegenüber dem Mittelwert von H_A und H_E um 63,37 % größer.

Tabelle 2

Die Tabelle gibt die an den Piezometerständen abgelesenen Druckhöhendifferenzen an. Im An- und Ablaufrohr lagen die Piezometerstände im gleichen Querschnitte auf gleicher Höhe und werden durch einen Wert angegeben. Im Krümmer sind die Piezometerstellen um je 90° gegeneinander verdreht.

	Manometer	Abstand von Manometer Nr. 1 in cm	Druckhöhenverlust in cm (Glyzerin)			
A	1	0,00		6,20		
	2	50,00		8,00		
	3	100,00		9,80		
	4	150,00		11,50		
	5	188,50		13,00		
	6	227,00		14,30		
	7	265,50		15,70		
	8	304,00		17,10		
	9	342,50		18,40		
	10	381,00		19,70		
	11	395,50		20.30		
			horizontal		vertikal	
			innen	außen	oben	unten
K	12	400,50	20,40	20,40	20,40	20,40
	13	403,60	20,90	20,50	20,60	20,60
	14	406,40	21,30	20,30	20,80	20,80
	15	409,20	21,20	20,60	20,90	20,90
E	16	412,30	21,10	21,10	21,10	21,10
	17	417,10		21,50		
	18	431,90		21,90		
	19	470,40		23,30		
	20	508,90		24,80		
	21	547,40		26,20		
	22	585,90		27.60		
	23	624,40		29.00		
	24	662,90		30,40		
	25	703,40		31,90		
	26	743,40		33,40		
	27	783,90		34,90		
	28	823,90		36,40		

Berechnete man den Druckhöhenverlust für das An- und Ablaufrohr aus der Poiseuilleschen Formel, so ergab sich $h_{ber} = 29{,}25$ cm, also ein um 2,96 % zu niedriger Wert. In Wirklichkeit war während des Versuches eine Temperaturerhöhung aufgetreten. Berücksichtigte man die dadurch eingetretene Viskositätsveränderung, so stimmten die berechneten mit den experimentell gefundenen Werten überein.

Bei sehr niedrigen Reynoldsschen Zahlen blieb der statische Druck im gleichen Rohrquerschnitt unter Berücksichtigung der Höhenlage gleich groß. Die Niveaustände in den Piezometern waren also auf gleicher Höhe, ganz gleichgültig, ob das Ansatzrohr oben, unten oder seitlich der Rohrwand angebracht war. Dies traf auch im Krümmer zu, wenn der Querschnitt senkrecht zur Rohrachse gewählt wurde. Bereits bei Reynoldsschen Zahlen über 20 traten hingegen Änderungen auf.

Bei der Reynoldsschen Zahl Re $= \sim 63$ blieb der statische Druck im An- und Ablaufrohr im gleichen Querschnitt konstant. Im Krümmer hingegen konnten die an verschiedenen Stellen des gleichen Querschnittes abgelesenen Werte von einander stark abweichen. So stellte es sich heraus, daß in der horizontalen Ebene der statische Druck zwischen konvexer und konkaver Krümmerwand im Ablenkungswinkel $\alpha = 90°$ 1 cm Druckunterschied aufwies (vgl. Tabelle 2). In der vertikalen Ebene war zwischen oben und unten keine Differenz feststellbar. Für die Ablenkungswinkel $\alpha = 45°$ und 135° wurden an den Steigrohren zwischen den wandständigen Meßstellen des horizontalen Achsenquerschnittes ein Druckunterschied von 0,4 cm abgelesen (vgl. Tabelle 2).

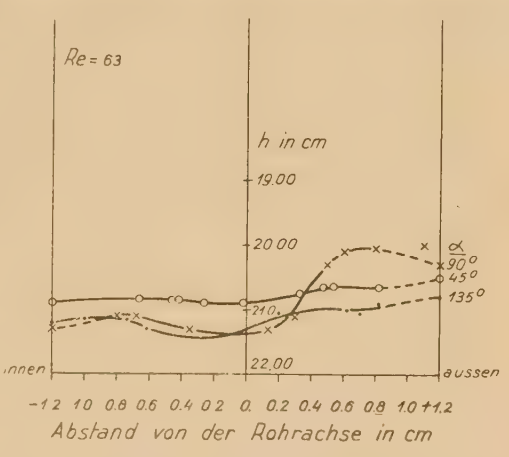


Abb. 16. Druckhöhendifferenzen im horizontalen Rohrquerschnitt in den Ablenkungswinkel $\alpha = 45°$; 90° und 135°. In $\alpha = 90°$ konnte für den horizontalen Querschnitt eine Druckkurve aufgestellt werden, deren Verlauf schon sehr kompliziert ist. Die Werte in der Näheder Rohrwand sind, wie früher schon bemerkt wurde, beeinflußt von den Störungen, die eine Kanüle in solch engen Rohren hervorrufen kann. Die Kurve ist in Wandnähe punktiert wiedergegeben, um so ihren wahrscheinlichen Verlauf zu markieren.

Zur Abklärung des statischen Druckverlaufes im ganzen Querschnitte wurden mit Hilfe einer stromlinienförmigen Kanüle mit seitlichem Loch der statische Druck an verschiedenen Punkten desselben Querschnittes ermittelt. Die Werte können der Abb. 16 entnommen werden und, wie ersichtlich, waren für $\alpha = 45°$ und 135° die Abweichungen vom Mitteldruck relativ klein.

c) Versuchsserie Re $= \sim 135$

Um bei gleichbleibender Arbeitsleistung des Elektromotors eine größere Geschwindigkeit im Rohrsystem herstellen zu können, war die Versuchsflüssigkeit mit destilliertem Wasser bis auf eine Dichte von $\varrho = 1{,}1935$ bei 21° C verdünnt worden. Der Zähigkeitswert bei der Temperatur 20° C war $\mu = 0{,}3458$. Für ein im Reservoir R unveränderlich eingestelltes Niveau wurde am Ausfluß die mittlere sekundliche Masse $M = 167{,}121$ g gemessen. Daraus folgte als mittlere Geschwindigkeit $\bar{u} = 30{,}95$ cm/sec und als Reynoldssche Zahl Re $= 135{,}2$.

Die Niveaus an den Steigrohren zeigten für das gerade Anlaufrohr und im Ablaufrohr in einer Entfernung von 19,60 cm vom Krümmerende, eine gerade

piezometrische Linie. Die nach dem Krümmer konvex nach unten ausbuchtende Druckkurve ging bei Manometer 18 in die lineare Druckkurve über.

Der gesamte Druckhöhenverlust von Manometer 1 bis 28 betrug $h = 40{,}80$ cm, die sich

auf das Anlaufrohr $h_a = 19{,}30$ cm,
auf das Ablaufrohr $h_e = 20{,}30$ cm und
den Krümmer $h_k = 1{,}20$ cm

verteilten.

Diese Druckhöhenverluste auf die Längeneinheit bezogen gaben für

$H_A = 0{,}04819$,
$H_E = 0{,}04932$,
$H_K = 0{,}1017$

oder 108,12 % mehr als der Mittelwert von H_A und H_E.

Tabelle 3

Druckhöhenverlust h im An- und Ablaufrohr.

	Manometer Nr.	Abstand von Manometer Nr. 1 in cm	Druckhöhenverlust h in cm (Glyzerin)			
A	1	0,00			10,00	
	2	50,00			12,30	
	3	100,00			14,80	
	4	150,50			17,20	
	5	188,50			19,10	
	6	227,00			21,00	
	7	265,50			22,80	
	8	304,00			24,60	
	9	342,50			26,50	
	10	381,00			28,40	
	11	395,50			28,90	
			horizontal		vertikal	
			innen	außen	oben	unten
K	12	400,50	29,30	29,30	29,30	29,30
	13	403,60	29,90	29,20	29,60	29,60
	14	406,40	30,40	28,90	29,50	29,90
	15	409,20	30,45	29,60	30,00	30,20
E	16	412,30	30,50	30,50	30,50	30,50
	17	417,10			31,10	
	18	431,90			31,80	
	19	470,40			33,70	
	20	508,90			35,50	
	21	547,40			37,40	
	22	585,90			39,30	
	23	624,40			41,10	
	24	662,90			43,00	
	25	703,40			44,90	
	26	743,40			46,70	
	27	783,90			48,80	
	28	823,90			50,80	

Wie die Tabelle 3 zeigt, blieb der statische Druck für die geraden Rohrteile im gleichen Querschnitt unverändert. Im Krümmer waren deutliche Druckdifferenzen zwischen innerer und äußerer Krümmung, zwischen oben und unten in der vertikalen Ebene senkrecht zur Rohrachse nachweisbar.

Der aus dem HAGEN-POISEUILLEschen Gesetz berechnete Druckhöhenverlust h_{ber} betrug 39,40 cm oder 3,43 % weniger als der im Experiment ermittelte Druckhöhenverlust h. Bei Berücksichtigung der Viskositätsveränderung infolge Temperaturerhöhung war h_{ber} praktisch gleich h_{exp}.

Für den Ablenkungswinkel $\alpha = 45°, 90°, 135°$, bzw. für die Querschnitte bei den Manometern 13, 14, 15 wurden mit der Sondenkanüle die Druckkurven des statischen Druckes über den horizontalen und vertikalen Querschnitt aufgenommen. Abb. 17 gibt die erhaltenen Werte.

3. Geschwindigkeitsmessungen

Für die REYNOLDSschen Zahlen Re > 20 sind zur Bestimmung der örtlichen Geschwindigkeit im Krümmer zahlreiche Versuche durchgeführt worden. Parallel zu den oben beschriebenen Druckmessungen werden in dieser Arbeit nur diejenigen Untersuchungsresultate wiedergegeben, welche durch die REYNOLDSsche Zahl Re $= \sim 63$ und Re $= \sim 135$ charakterisiert sind. Die Größen der mittleren Geschwindigkeit, der Dichte, der Zähigkeit und des Druckhöhenverlustes sind in der früheren Besprechung des statischen Druckes bereits enthalten.

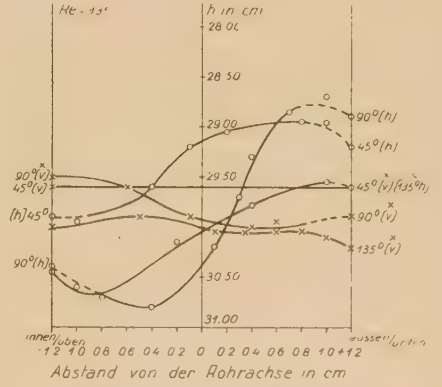
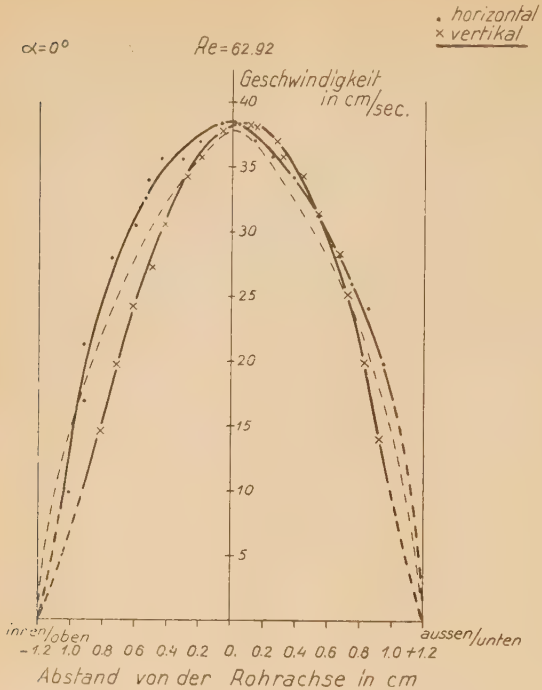


Abb. 17. Druckhöhendifferenzen im horizontalen und vertikalen Rohrquerschnitt in den Ablenkungswinkeln $\alpha = 45°$, 90° und 135°. Aus dem Diagramm geht hervor, daß sich im Krümmer für den horizontalen Querschnitt ziemlich komplizierte Druckkurven ergeben, während im vertikalen Querschnitt eher eine gleichmäßige statische Druckverteilung vorhanden war.

Aus dem linearen Druckabfall längs des geraden An- und Ablaufrohres ging schon POISEUILLEsche und folglich parabolische Strömung hervor. Mit der in Kapitel III eingehend gewürdigten Meßmethode wurde bei den geraden Rohrteilen auch ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil für Re $= \sim 63$ und Re $= \sim 135$ sichergestellt. Das Hauptinteresse ist verständlicherweise auf die Krümmung selbst verlegt worden. In den Ablenkungswinkeln $\alpha = 0°, 45°, 90°, 135°, 180°$, d. h. dort, wo der statische Druck wandständig und über den Rohrquerschnitt gemessen wurde, ist auch die örtliche Geschwindigkeit an verschiedenen Stellen gemessen worden.

Zu den nachfolgenden Geschwindigkeitsprofilen ist zu bemerken, daß die in Wandnähe durchgeführten Messungen nicht die gewünschte Zuverlässigkeit zeigten, weil die durch die Kanüle hervorgerufenen Störungen nicht zu vermeiden waren. Links und rechts der Rohrachse sind die angegebenen Werte als Mittelwerte verschiedener Messungen zu betrachten.

Für die beiden REYNOLDSschen Zahlen Re $= \sim 63$ und Re $= \sim 135$ erfolgt die Beschreibung der Geschwindigkeitsprofile im Krümmer getrennt.



a) Versuchsserie Re = ~63

Abb. 18. Geschwindigkeitskurven bei Ablenkungswinkel $\alpha = 0°$.

Unmittelbar vor dem Krümmerbeginn, also bei $\alpha = 0°$, geht aus der Messung im horizontalen und vertikalen Rohrdurchmesser noch deutlich parabolische Strömung hervor.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: + 8,9%.

Das Geschwindigkeitsprofil der geraden Rohrstrecke ist bei sämtlichen Abbildungen gestrichelt dargestellt.

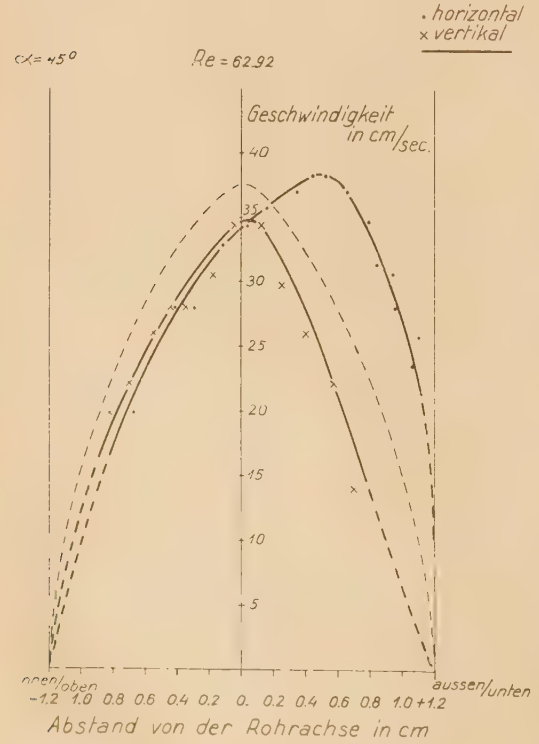


Abb. 19. Geschwindigkeitskurven bei Ablenkungswinkel $\alpha = 45°$.

Beim Ablenkungswinkel $\alpha = 45°$ verlagert sich die Geschwindigkeitsverteilung mehr gegen die konkave Außenwand hin.

Aus den Messungen erkennt man ohne weiteres, daß die Voraussetzungen für eine Geschwindigkeitsverteilung, die der eines Rotationsparaboloides entspräche, nicht mehr erfüllt wird, weil die Geschwindigkeit ihr Maximum nicht mehr in der Rohrachse hat.

Differenz zwischen Modellvolumen und Ausflußvolumen: + 2,6%.

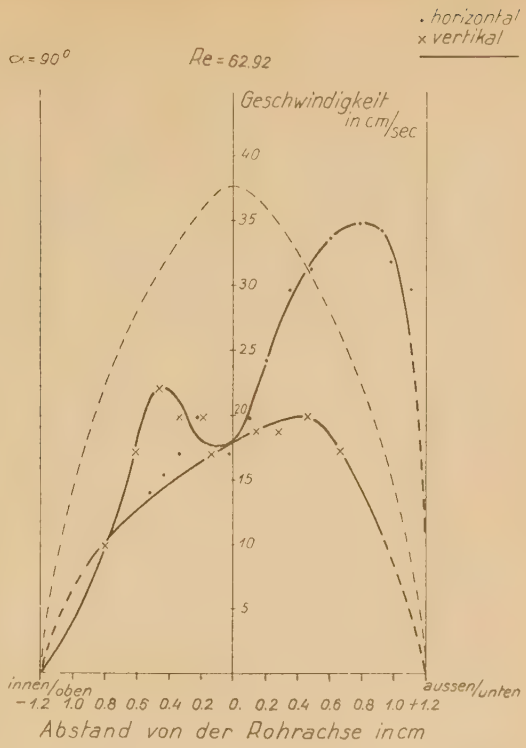


Abb. 20. Geschwindigkeitskurven bei Ablenkungswinkel $\alpha = 90°$.

Für $\alpha = 90°$ ist die Geschwindigkeitsvariation über den Rohrquerschnitt noch viel divergenter als im vorangegangenen Profil. Ein deutliches Geschwindigkeitsmaximum liegt auf der konkaven Außenwand. In der vertikalen Ebene werden die maximalen Werte nicht erreicht. Die um die Rohrachse herum gemessenen Geschwindigkeitswerte weisen ziemliche Streuungen auf. Die Geschwindigkeitskurve gibt für die achsennahen Messungen einen approximativen Mittelwert an. Das räumlich modellierte Profil zeigt, wie die Flüssigkeitsteilchen unter dem Einfluß der zentrifugalen Beschleunigung ganz am äußeren Rand vorbeiströmen.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: + 0,9%.

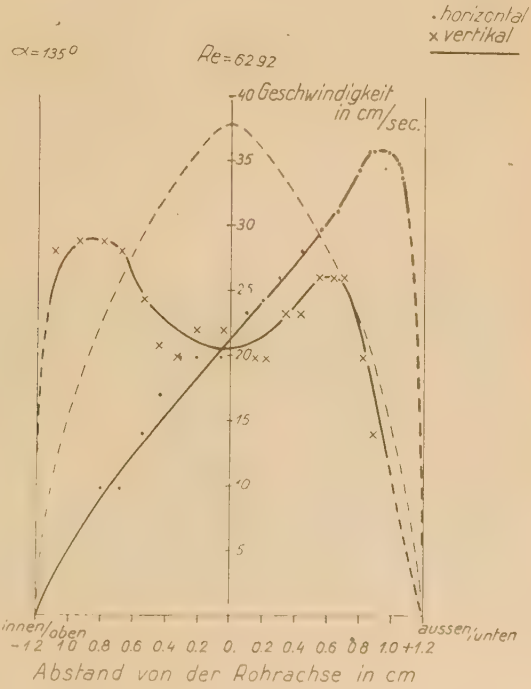


Abb. 21. Geschwindigkeitskurven bei Ablenkungswinkel $\alpha = 135°$.

Wie bei den Strömungsbildern beobachtet wurde, stellt sich die Parallelität der Flüssigkeitsfäden nur sehr langsam wieder ein. Aus den Geschwindigkeitsmessungen geht hervor, daß bei $\alpha = 135°$ im vertikalen Meßbereich u wieder stark zunimmt. Diese Zunahme ist interessanterweise symmetrisch beidseitig der Rohrachse zu beobachten. Die vertikale Geschwindigkeitsteilung gibt dem räumlichen Profil jene in der Achsenmitte tief einbuchtende Form. Im großen und ganzen ist aber die Durchflußverteilung noch sehr stark zentrifugal bestimmt.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: + 13%.

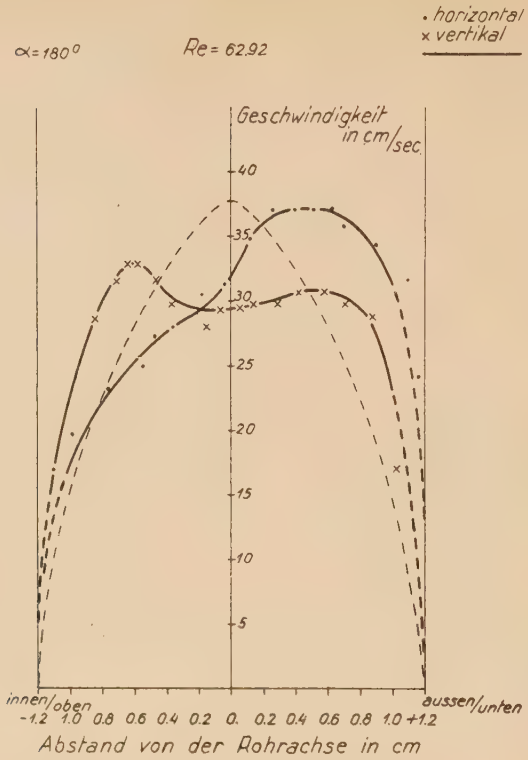


Abb. 22. Geschwindigkeitskurven bei Ablenkungswinkel $\alpha = 180°$.

Das Geschwindigkeitsprofil nähert sich am Krümmerende bei $\alpha = 180°$ der rotationssymmetrischen Form. Das Maximum der Geschwindigkeit tendiert merklich gegen die Achsenmitte. Die beiden vertikalen Kurvenmaxima des Profiles bei $\alpha = 135°$ haben sich hier wesentlich verflacht und ausgeglichen.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: + 12,46%.

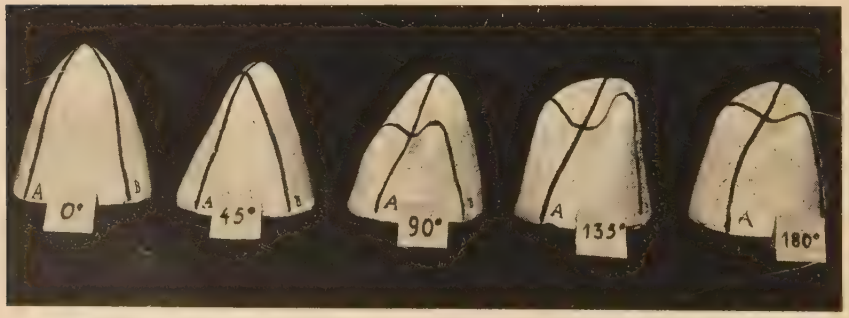


Abb. 23. Räumliche Darstellung der Geschwindigkeitsprofile in den Ablenkungswinkeln.
$\alpha = 0°, 45°, 90°, 135°, 180°$.

b) Versuchsserie
Re = ∼ 135

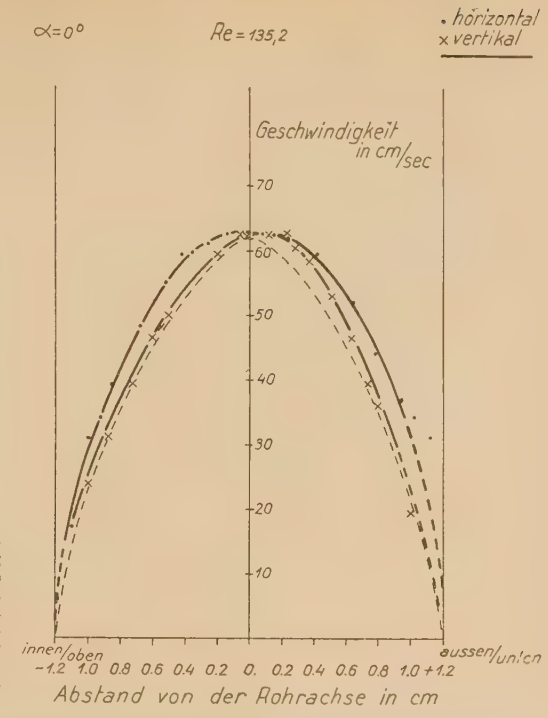


Abb. 24. Geschwindigkeitskurven beim Ablenkungswinkel $\alpha = 0°$.

Die Flüssigkeit kommt vor der Krümmung in laminärer geschichteter Strömung an. Die Geschwindigkeit findet in der Mitte der Stromröhre ihr Maximum $U = 2\bar{u}$. Die Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt ist bei $\alpha = 0°$ parabolisch. Das modellierte Profil stellt ein Rotationsparaboloid dar.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: + 7%.

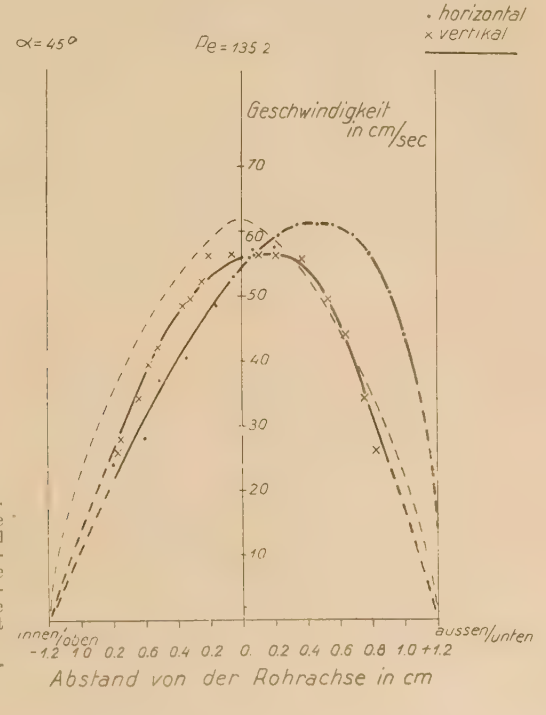


Abb. 25. Geschwindigkeitskurven beim Ablenkungswinkel $\alpha = 45°$.

Beim Ablenkungswinkel $\alpha = 45°$ verschwindet die zur Rohrachse symmetrische Geschwindigkeitsverteilung. Horizontal verschiebt sich das Maximum der Geschwindigkeitskurve unverkennbar an die konkave Außenwand, während das vertikale Profil immer noch in der Rohrachse ein Maximum aufweist, das aber nicht mehr gleich $2\bar{u}$ ist.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: + 8%.

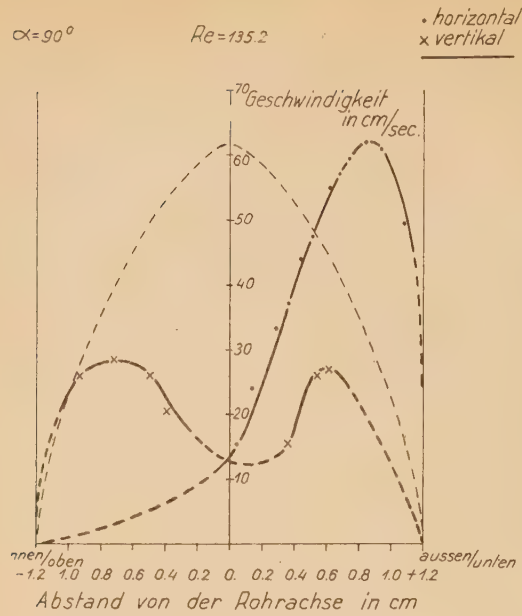


Abb. 26. Geschwindigkeitskurven beim Ablenkungswinkel $\alpha = 90°$.

Die Messungen im Rohrquerschnitt beim Winkel $\alpha = 90°$ waren äußerst schwierig. Schon bei der Farbfadenbeobachtung wurde auf den Geschwindigkeitsabfall im konvexen Rohranteil hingewiesen. In der horizontalen Meßebene wurden nur zwischen Rohrachse und konkavem Querschnittsgebiet brauchbare Resultate erzielt. Für den übrigen Querschnitt ist das Kurvendiagramm näherungsweise angenommen und extrapoliert worden. In der vertikalen Ebene stellen sich beidseitig der Achse zwei Kurvenmaxima ein, welche schon bei $Re = \sim 63$ für $\alpha = 135°$ beobachtet worden sind. Das räumliche Modell zeigt wie der Hauptdurchfluß sich konkavwärts vollzieht und innen die Geschwindigkeit fast bis zum Nullwert absinkt.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: — 11,8%.

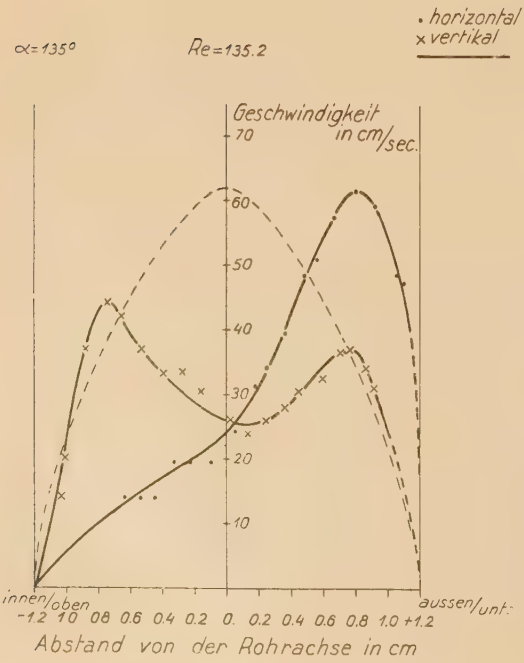


Abb. 27. Geschwindigkeitskurven beim Ablenkungswinkel $\alpha = 135°$.

Beim Ablenkungswinkel $\alpha = 135°$ weist das horizontale Geschwindigkeitsprofil eine große Ausdehnung rechts der Rohrachse auf. Die oben schon erwähnten Maxima beidseitig der Rohrachse, welche im vertikalen Querschnitt beobachtet worden sind, haben sich bis hierher erhalten und verleihen dem räumlich modellierten Geschwindigkeitsprofil eine tief einbuchtende Form.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen: — 5,5%.

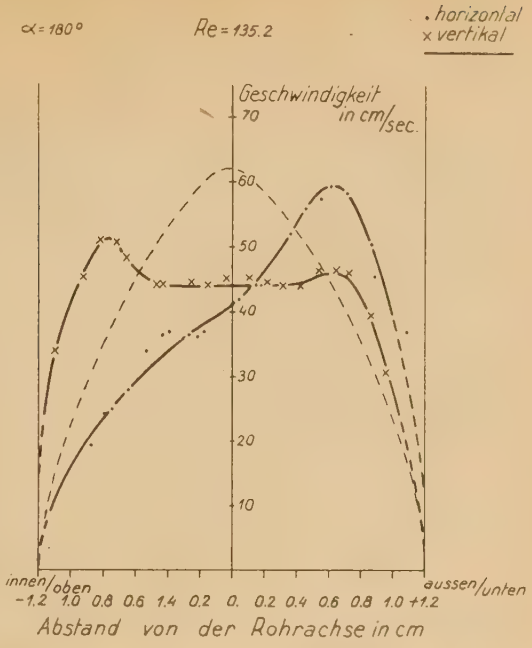


Abb. 28. Geschwindigkeitskurven beim Ablenkungswinkel $\alpha = 180°$.

Eine ziemlich flache vertikale Geschwindigkeitskurve folgt aus den Messungen am Krümmerende bei $\alpha = 180°$. In der horizontalen Ebene des Rohrquerschnittes herrscht immer noch die Rechtsverschiebung nach der konkaven Seite hin vor. Aus den Druckmessungen konnte man ableiten, daß die Krümmerstörung sich auch ins Ablaufrohr hineintragen werde, weil die Linearität des Druckabfalles erst nach einiger Distanz erreicht wurde. Die Geschwindigkeitsmessungen und die räumlich modellierten Profile am Krümmerende lassen deutlich erkennen, daß ein Parabelprofil hier noch nicht erreicht war.

Differenz zwischen Modell- und Ausflußvolumen : + 6,9%.

Abb. 29. Räumliche Darstellung der Geschwindigkeitsprofile in den Ablenkungswinkeln $\alpha = 0°$, 45°, 90°, 135°, 180°.

4. Widerstandsbeiwert des Krümmers h_{kr}

Da bei der experimentellen Abklärung der Strömungsverhältnisse in einem Krümmer der Widerstand, welchen ein solcher Krümmer zusätzlich auslöst, von besonderer Bedeutung ist, wurden diese Versuchsreihen getrennt von den anderen durchgeführt.

Der experimentell festgestellte Druckhöhenverlust längs des ganzen Systems von Manometer 1- 28 wird mit h_{ex} bezeichnet (vgl. Druckmessungen, IV. Kapitel). Aus der Poiseuilleschen Formel kann der Druckhöhenverlust h_{ber} theoretisch berechnet werden (vgl. IV. Kapitel, 2. Druckmessungen, Versuchsserie Re $= \sim 10$). Die Differenz zwischen experimentellem und theoretischem Druckhöhenverlust wird als zusätzlicher Widerstand des Krümmers

definiert und zwar unter der Annahme, daß der Krümmer als gerades Rohr von gleicher Länge wie die Krümmermittellinie angenommen wird. Also in der Formel ausgedrückt:

$$h_{kr} = h_{ex} - h_{ber} \qquad [18]$$

Um die Fehlerquellen bei diesen ausschlaggebenden Versuchen zu verringern, wurde die Apparatur so verändert, daß ein neuer Gummikrümmer gleicher Dimension wie die oben angeführten, aber ohne seitliche Stanzlöcher, zwischen An- und Ablaufrohr eingesetzt worden ist.

Dazu wurde noch die Konstanterhaltung der Temperatur etwas verbessert.

Als Versuchsflüssigkeit diente durchweg Glyzerin von der Dichte $\varrho = 1{,}1943$. Der entsprechende Zähigkeitswert ist bei 21° C $\mu = 0{,}3478$.

Die Versuchsergebnisse können aus der Abb. 30 abgelesen werden. Im Diagramme ist h_{kr} als Funktion von $\bar{u}$ und ebenso als Funktion der REYNOLDS-

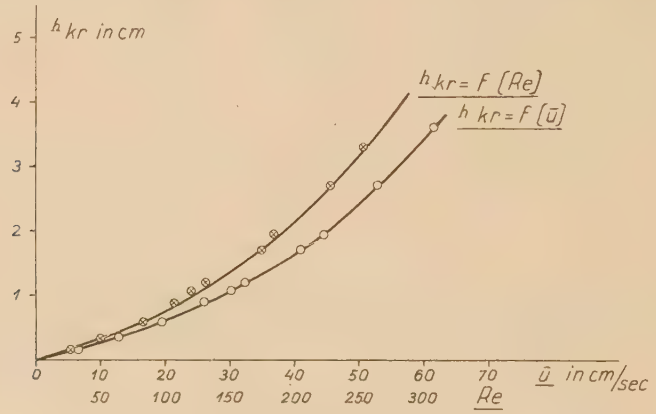


Abb. 30.

schen Zahl $Re = f(u)$ dargestellt. Aus der Abb. geht hervor, daß die Kurve unterhalb $Re = 150$ ziemlich langsam ansteigt, oberhalb $Re = 150$ aber rasch steiler wird.

V. Zusammenfassung

In einem geschichtlichen Überblick ist die zugängliche wichtigste Literatur zum Krümmerproblem chronologisch dargelegt worden.

Die Strömungsverhältnisse in einem Krümmer mit dem Ablenkungswinkel $\alpha = 180°$ dem Krümmungsradius $R = 2{,}675$ cm und dem inneren Durchmesser $d = 2{,}40$ cm experimentell abzuklären, war Ziel und Aufgabe der vorliegenden Arbeit.

Voruntersuchungen bis zur REYNOLDSschen Zahl $R = 5000$ zeigten, daß es der besseren Übersicht halber vorteilhaft ist, die Strömungen in drei Typen zu zerlegen. In dieser Arbeit wurde nur der geordnete Strömungstyp allein untersucht.

Mittels der Farbfadenmethode wurde der Verlauf der einzelnen Stromlinien im Krümmer aufgezeigt.

Die Druckmessungen ergaben für einen bestimmten Teil der geraden Rohrstrecke ein dem POISEUILLEschen Gesetze entsprechendes lineares Druckgefälle, während für den Krümmer der Druckverlauf tangential und besonders radial stark davon abwich.

Die Geschwindigkeitsprofile im Krümmer sind nach der Methode von PITOT, unter Verwendung passender Manometer aufgenommen und räumlich dargestellt worden.

Zum Schluß wird die Erhöhung des Druckverlustes infolge Einschaltung eines Krümmers zahlenmäßig ausgedrückt.

Schrifttum:

1. Richter, Topographie der Stadt Rom, 316ff. (1901), vgl. Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft **3**, A. — 2. Mau, A., Pompeji in Leben und Kunst, 213f. (1900). — 3. Plinius, c. Caec. Secundi Epistulae, geb. 23 n. Chr., gest. 79 n. Chr. beim Vesuvausbruch. Seine Werke wurden von Plinius dem Jüngeren herausgegeben. Sie enthalten u. a. Angaben über die Wasserleitungen von Nicomedia, über die Erhöhung des hydrodynamischen Druckes durch Anlage einer Hochleitung. — 4. Frontinus, Sextus Julius, De aquis urbis Romae. Frontinus war römischer Offizier und technischer Schriftsteller; geb. ca. 40 n. Chr., gest. 103 n. Chr. — 5. Leonardo da Vinci (1452—1519), De retrosi dell'acqua. Vgl. Handbuch der Experimentalphysik von Wien-Harms, Bd. **4**, 2. Teil, 3—57 (1932). — 6. Galileo Galilei (1564—1642), Lettera di Galileo Galilei sopra il fiume Bisenzo a Rafaello Staccoli. Da Bellosguarda li 16 Gunajo 1630. Biographische Daten auch bei Dessauer, F.: Der Fall Galilei und wir (Luzern 1943) und bei Lämmel, R., Galileo Galilei und sein Zeitalter (Zürich 1942). — 7. Castelli Benedetto (Antonio), O.S.B. (1577—1643), Della misura delle acqua correnti (Rom 1628). Vgl. Enciclopedia italiana, Bd. **9**, 354. — 8. Dubuat, Principes d'Hydraulique, vérifiés par un grand nombre d'Expériences faites par ordre du Gouvernement. Tome premier et second, nouvelle édition, revue, et considérablement augmentée (Paris 1786). — 9. Hagen, G., Handbuch der Wasserbaukunst (Königsberg 1841). — 10. Eytelwein, J. A., Handbuch der Mechanik fester Körper und der Hydraulik (Berlin 1801). — 11. Navier, Résumé de Leçons. Application de la Mécanique à l'établissement des constructions et des machines, IIième partie, no. 119 (Paris 1838). — 12. Weisbach, Julius, Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik. Erster Teil, Theoretische Mechanik (Braunschweig 1845). — 13. Freemann, J. R., Transactions of the American Society of Civil Engineers, **21**, 365 (New York 1889). — 14. Montanari, T., Politecnico, **45**, 522 (1893). — 15. Williams, G. S., Hubbel, C. W., Frenkell, G. H., Am. Soc. Civ. Eng. Trans. **47**, 183 (1902).— 16. Brightmore, A. W., Min. Proc. Inst. Civ. Eng. **169**, 315 (1907). — 17. Davis, G. J., Am. Soc. Civ. Eng. Trans. **62**, 109 (1909). — 18. Grindley-Gibson, Proc. Roy. Soc. Lond. (A), **80**, 114 (1909). — 19. Grether, H., Über Potentialbewegung tropfbarer Flüssigkeiten in gekrümmten Kanälen. Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes (Berlin 1909). Nicht zugänglich gewesen. — 20. Wagenbach, Beiträge zur Turbinentheorie. Z. ges. J. **1907**. Nicht zugänglich gewesen. — 21. Isaachsen, J., Innere Vorgänge in strömenden Flüssigkeiten und Gasen. Z. VDI **55**, 215, 263, 428, 605, 946 (1911). — 22. Lell, J., Beitrag zur Kenntnis der Sekundärströmungen in gekrümmten Kanälen. Dissertation (Darmstadt 1913). — 23. Lechner, G., Untersuchung der Turbulenz beim Durchströmen von Wasser und Quecksilber durch spiralförmig gewundene Kapillaren. Annalen der Physik (4), **42**, 614—642 (1913). — 24. Schiller, L., Strömung in Röhren, Wien-Harms, Handbuch der Experimentalphysik **6**/4, 176ff. — 25. Hinderks, A., Nebenströmungen in gekrümmten Kanälen. Z. VDI **71**, 1779 (1927) — 26. Dean, R. W., The Stream-line Motion of Fluid in a Curved Pipe. Phil. Mag. (7), **4**, 208 (1927); **5**, 173 (1928). — 27. Eustice, Proc. Roy. Soc. Lond. (A) **84**, 107 (1910). — 28. White, C. M., Streamline Flow through Curved Pipes. Proc. Roy. Soc. Lond .(A), **123**, 645 (1929). — 29. Frank, O., Modell für die Strömung im Aortenbogen. Z. Biol., **88**, 245 (1928). — 30. Lorenz, H., Der Widerstand von Rohrkrümmern. Physik. Z. **30**, 228 (1929). — 31. Hofmann, A., Der Verlust in 90°-Rohrkrümmern mit gleichbleibendem Kreisquerschnitt. Mitteilungen des Hydraulischen Institutes der Technischen Hochschule München. Herausgegeben von D. Thoma. Heft 3 (1929). (München u. Berlin 1929.) — 32. Nippert, H., Über den Strömungsverlust in gekrümmten Kanälen. Z. VDI **73**, 1391 (1929). — 33. Forchheimer, Ph., Hydraulik[3] (Leipzig u. Berlin 1930). — 34. Richter, H., Der Druckabfall in gekrümmten Rohrleitungen. Forschungsarbeiten VDI, Heft 338 (1930). — 35. Gregorig, R., Turbulente Strömungen in geraden und gekrümmten glatten Rohrleitungen bei hohen Reynoldsschen Zahlen. Dissertation ETH, (Zürich 1933). — 36. Timm, Cl., Der Strö-

mungsverlauf in einem Modell der menschlichen Aorta. Z. Biol. **101**, Heft 1, (1942). — 37. VIERORDT, Anatomische, physiol. und physikalische Daten und Tabellen. 171 bis 177 (Jena 1906). — 38. REYNOLDS, O., Phil. Trans. Roy. Soc. (1883) und Papers **2**, 51—105. — 39. MÜLLER, A., Abhandlungen zur Mechanik der Flüssigkeiten mit besonderer Berücksichtigung der Hämodynamik. Strömen in Röhren. Faszikel I, Die NEWTONsche Strömung. (Freiburg/Schweiz und Leipzig 1936).

Anschrift des Verfassers:

Dr. P. ANSGAR MÜLLER, Stiftschule, Disentis/Graubünden-Schweiz.

Curriculum vitae

Am 12. März 1918 wurde ich in Feuerthalen (ZH) geboren als Sohn des Leo Müller von Lengnau (AG) und der Josephine Müller, geb. Helbling von Jona (SG).

Ich besuchte in Feuerthalen (ZH) 6 Klassen Primarschule, in Schaffhausen die Realschule und an der Klosterschule Disentis (GR) 5 Klassen des Gymnasiums, wo ich im Jahre 1938 die Maturität Typus A bestand.

Nach Absolvierung des theologischen Studiums und vierjähriger Lehrtätigkeit an der Klosterschule Disentis (GR) wurde ich von meinen Oberen zum Studium der Naturwissenschaften nach Fribourg geschickt. Im Herbst 1947 wurde ich an der Universität Fribourg immatrikuliert. Ich besuchte die Vorlesungen und Praktika der Herren Professoren Bays, Chardonnens, Dessauer, Diesbach, Giovannini, Kälin, Müller, Tercier und Ursprung.

Besonderen Dank schulde ich Herrn Prof. A. Müller, Fribourg, der diese Arbeit angeregt und stets gefördert hat.